積分 2

定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の近似値をシンプソン公式により求める.

実行例（Pascal プログラム）

定積分（シンプソン公式）

被積分関数を選んでください
[0] **x に対する y の値をその都度入力する**
[1] **y = x**^2
[2] **y =** sin **x**
どれにしますか [0-2] ? 0
積分区間［**a b**］? 0 1

何（**偶数**）**分割しますか**（0 **を入れると終了**）［**n**］? 10
x = 0.00 **y =** 0.000
x = 0.10 **y =** 0.001
x = 0.20 **y =** 0.008
x = 0.30 **y =** 0.027
x = 0.40 **y =** 0.064
x = 0.50 **y =** 0.125
x = 0.60 **y =** 0.216
x = 0.70 **y =** 0.343
x = 0.80 **y =** 0.512
x = 0.90 **y =** 0.729
x = 1.00 **y =** 1.000
S = 0.25000

何分割しますか（0 **を入れると終了**）［**n**］? 2
x = 0.00 **y =** 0.000
x = 0.50 **y =** 0.125
x = 1.00 **y =** 1.000
S = 0.25000

何分割しますか（0 **を入れると終了**）［**n**］?

シンプソン公式

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx \quad &\fallingdotseq \quad \sum_{k=1}^{m} \frac{f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})}{6}\,(2dx_n) \\
&= \quad \left(f(a)+4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})+f(b) \right) \frac{dx_n}{3}
\end{aligned}
$$

ただし $n=2m, \quad dx_n=\dfrac{b-a}{n}, \quad x_k=a+\dfrac{k}{n}(b-a) \qquad (=a+k\ dx_n).$

区間 $a \leqq x \leqq b$ を $n(=2m)$ 等分して，小区間を 2 つまとめた $x_{2k-2} \leqq x \leqq x_{2k}$ において，左端 $\big(x_{2k-2}, f(x_{2k-2})\big)$，中央 $\big(x_{2k-1}, f(x_{2k-1})\big)$，右端 $\big(x_{2k}, f(x_{2k})\big)$ の 3 点を通る放物線とみなした図形で近似したものである．

この 3 点を通る 3 次関数のグラフは無数にあるが，いずれも放物線とで囲まれる部分の面積は放物線より上にある部分と下にある部分と同じである．ゆえに，この 3 点を通る最適の 3 次関数のグラフで近似したものということができる．

したがって，上の実行例（Pascal プログラム）でもわかるように，被積分関数が高々 3 次関数ならば（2 分割でも）近似値ではなく正確な値が得られる．

3 次関数 $f(x)$ について

$$
\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}
$$