1　命題論理

1.1　目的

与えられた命題 φ が**恒真命題**（常に正しい命題，tautology）であるかどうかを調べる。

その方法は，命題の否定 $\neg\varphi$ に同値変形を繰り返して**積和標準形**（disjunctive normal form）$\mathrm{dnf}(\neg\phi)$ に変換することによって調べる。φ が恒真の場合，$\neg\varphi$ は**矛盾命題**（contradiction）であるから積和形はない（空になる）。ゆえに，同値変形の過程で空（矛盾）に至ったら，φ が恒真であることがわかる。φ が恒真でない場合，最後に得られた否定の積和形 $\mathrm{dnf}(\neg\phi)$ に現れる基本積（の任意のひとつ）を真にするように命題変数に値（真または偽）を代入すると，φ が偽になる。すなわち，**反例**（counter example）が得られる。

1.2　解説

定義 1. 次のようにして定まるものを**命題**という[1]。

(1) **命題変数** $A, B, C, \ldots, Z$ は命題である。

(2) φ が命題のとき，$\neg\varphi$ も命題である。

(3) φ, ψ が命題のとき，$(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \equiv \psi)$ も命題である。

定義 2. 次のように結合の優先順位を定め，いくつかの括弧を省略して書くことがある。

(1) $\to, \equiv$ より $\wedge, \vee$ を優先する。
例
$$((A \vee B) \to (C \wedge D)) \quad \Leftrightarrow \quad A \vee B \to C \wedge D$$
$$((A \to B) \wedge (C \equiv D)) \quad \Leftrightarrow \quad (A \to B) \wedge (C \equiv D)$$

(2) $\wedge, \vee$ どうしでは，左の方を優先する。
例
$$((A \wedge B) \wedge C) \quad \Leftrightarrow \quad A \wedge B \wedge C$$
$$(A \wedge (B \wedge C)) \quad \Leftrightarrow \quad A \wedge (B \wedge C)$$

(3) $\to, \equiv$ どうしでは，右の方を優先する。
例
$$((A \to B) \to C) \quad \Leftrightarrow \quad (A \to B) \to C$$
$$(A \to (B \to C)) \quad \Leftrightarrow \quad A \to B \to C$$

---
[1]章末に付録としてギリシャ文字の一覧表がある。

定義 3.

(1) 命題変数と，命題変数の否定を**リテラル**（literal）という。
例 $A,\ \neg A,\ B,\ \neg B$

(2) リテラルを $\wedge$ で結んだものを**基本積**（fundamental conjunction）という。
例 $A,\ A \wedge B,\ \neg A \wedge B \wedge \neg C$

(3) 基本積を $\vee$ で結んだものを**積和標準形**（disjunctive normal form）という。
例 $\neg B,\ B \wedge \neg C,\ (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge C \wedge \neg D) \vee B$

定義 4. 積和形においては，次のように書くこともある。

(1) 否定 $\neg\varphi$ を $\overline{\varphi}$ と書く。

(2) 論理積 $\varphi \wedge \psi \wedge \chi \wedge \cdots$ を $\varphi\psi\chi\cdots$ と書く。
例 $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge C \wedge \neg D) \vee B \quad \Leftrightarrow \quad A\overline{B} \vee \overline{A}C\overline{D} \vee B$

注 1.

(1) 基本積の中のリテラルの順序を交換しても同値である。
例 $CAD\overline{B}AC \quad \Leftrightarrow \quad AA\overline{B}CCD$

(2) 基本積の中に重複して現れているリテラルは，一つだけ残して他を消しても同値である。
例 $AA\overline{B}CCD \quad \Leftrightarrow \quad A\overline{B}CD$

(3) 積和形の中の基本積の順序を交換しても同値である。
例 $B\overline{B}\overline{C} \vee A\overline{B}CD \vee \overline{B}D \quad \Leftrightarrow \quad A\overline{B}CD \vee B\overline{B}\overline{C} \vee \overline{B}D$

(4) 積和形の中の矛盾している（同じ変数の肯定と否定を含む）基本積を消しても同値である。
例 $A\overline{B}CD \vee B\overline{B}\overline{C} \vee \overline{B}D \quad \Leftrightarrow \quad A\overline{B}CD \vee \overline{B}D$

(5) 2つの基本積の一方に現れるリテラルがすべて他方にも現れているとき，後者を消しても同値である。
例 $A\overline{B}CD \vee \overline{B}D \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B}D$

定義 5. 注 1 の (2),(4),(5) を行って，冗長なリテラルや基本積を全部消し去り，これ以上簡単にできない積和形を**極小積和形**（minimal dnf）という。

注 2. 極小積和形は，それと同値な積和形の中で最小（最も簡単な形をしている）とは限らない。$A\overline{B} \vee AB \vee \overline{A}\,B$ は極小積和形であるが，$A \vee B$ はこれと同値でもっと簡単な形をしている。

簡単に言うと，積和形は “変数と変数の否定の論理積の論理和の形” をしている。この変数の部分を命題で置き換えた “命題と命題の否定の論理積の論理和” を汎積和形と呼ぶことにする。

定義 6. 次の形を**汎積和形**という。

$$(\alpha_{1,1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{1,m_1} \wedge \neg\beta_{1,1} \wedge \cdots \wedge \neg\beta_{1,n_1}) \vee \cdots \vee (\alpha_{\ell,1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\ell,m_\ell} \wedge \neg\beta_{\ell,1} \wedge \cdots \wedge \neg\beta_{\ell,n_\ell})$$

汎積和形の $\neg, \wedge, \vee$ を省略して，次のように分けて考えることにする。

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{1,1},\ \cdots,\ \alpha_{1,m_1} & | & \beta_{1,1},\ \cdots,\ \beta_{1,n_1} \\ & \vdots & \\ \alpha_{\ell,1},\ \cdots,\ \alpha_{\ell,m_\ell} & | & \beta_{\ell,1},\ \cdots,\ \beta_{\ell,n_\ell} \end{array}$$

この各行を，**肯定否定式** といい，| の左辺を**肯定部**，右辺を**否定部**という。

積和形を求めるための同値変形は肯定否定式にあらわれる命題の**分解**という形で表すことができる。分解する命題が肯定部，否定部どちらにあるか，最後に結合した演算子が何かによって，10 種類の分解規則がある。規則によって，肯定否定式が 2 つの肯定否定式に分かれる規則と，分かれないで 1 つのままである規則とがある。

定義 7. 分解規則

Γ, Δ は命題の列を表し，横線の上の肯定否定式を分解して，下の 1 つまたは 2 つの肯定否定式にできることを意味する。

(肯定 $\neg$)
$$\begin{array}{r|l} \Gamma,\ \neg\varphi & \Delta \\ \hline \Gamma & \Delta,\ \varphi \end{array}$$

(否定 $\neg$)
$$\begin{array}{r|l} \Gamma & \Delta,\ \neg\varphi \\ \hline \Gamma,\ \varphi & \Delta \end{array}$$

(肯定 $\wedge$)
$$\begin{array}{r|l} \Gamma,\ \varphi\wedge\psi & \Delta \\ \hline \Gamma,\ \varphi,\ \psi & \Delta \end{array}$$

(否定 $\wedge$)
$$\begin{array}{r|l} \Gamma & \Delta,\ \varphi\wedge\psi \\ \hline \Gamma & \Delta,\ \varphi \\ \Gamma & \Delta,\ \psi \end{array}$$

(肯定 $\vee$)
$$\begin{array}{r|l} \Gamma,\ \varphi\vee\psi & \Delta \\ \hline \Gamma,\ \varphi & \Delta \\ \Gamma,\ \psi & \Delta \end{array}$$

(否定 $\vee$)
$$\begin{array}{r|l} \Gamma & \Delta,\ \varphi\vee\psi \\ \hline \Gamma & \Delta,\ \varphi,\ \psi \end{array}$$

(肯定 $\to$)
$$\begin{array}{r|l} \Gamma,\ \varphi\to\psi & \Delta \\ \hline \Gamma & \Delta,\ \varphi \\ \Gamma,\ \psi & \Delta \end{array}$$

(否定 $\to$)
$$\begin{array}{r|l} \Gamma & \Delta,\ \varphi\to\psi \\ \hline \Gamma,\ \varphi & \Delta,\ \psi \end{array}$$

(肯定 $\equiv$)
$$\begin{array}{r|l} \Gamma,\ \varphi\equiv\psi & \Delta \\ \hline \Gamma,\ \varphi,\ \psi & \Delta \\ \Gamma & \Delta,\ \varphi,\ \psi \end{array}$$

(否定 $\equiv$)
$$\begin{array}{r|l} \Gamma & \Delta,\ \varphi\equiv\psi \\ \hline \Gamma,\ \varphi & \Delta,\ \psi \\ \Gamma,\ \psi & \Delta,\ \varphi \end{array}$$

注 3. これらは積和形を求めるために行う同値変形を規則化したものである[2]。たとえば，$\to$ の規則を見てみよう。Γ, Δ がそれぞれ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ と $\beta_1, \ldots, \beta_n$ であるとし，$\tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}$ をそれぞれ $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m$ と $\neg\beta_1 \wedge \cdots \wedge \neg\beta_n$ の略だとする。

(否定 $\to$)
$$\begin{aligned}
\underbrace{\tilde{\Gamma} \wedge \tilde{\Delta} \wedge \neg(\varphi \to \psi)}_{\text{上式}} &\iff \tilde{\Gamma} \wedge \tilde{\Delta} \wedge (\varphi \wedge \neg\psi) && (\to \text{の性質}) \\
&\iff \underbrace{\tilde{\Gamma} \wedge \varphi \wedge \tilde{\Delta} \wedge \neg\psi}_{\text{下式}} && (\text{交換法則})
\end{aligned}$$

(肯定 $\to$)
$$\begin{aligned}
\underbrace{\tilde{\Gamma} \wedge (\varphi \to \psi) \wedge \tilde{\Delta}}_{\text{上式}} &\iff \tilde{\Gamma} \wedge (\neg\varphi \vee \psi) \wedge \tilde{\Delta} && (\to \text{の性質}) \\
&\iff \left(\tilde{\Gamma} \wedge \neg\varphi \wedge \tilde{\Delta}\right) \vee \left(\tilde{\Gamma} \wedge \psi \wedge \tilde{\Delta}\right) && (\text{分配法則}) \\
&\iff \underbrace{\left(\tilde{\Gamma} \wedge \tilde{\Delta} \wedge \neg\varphi\right)}_{\text{下式 } 1} \vee \underbrace{\left(\tilde{\Gamma} \wedge \psi \wedge \tilde{\Delta}\right)}_{\text{下式 } 2} && (\text{交換法則})
\end{aligned}$$

[2]章末の付録に重要な同値命題を載せてある。

分解を繰り返し適用すると，どの式がどの式を分解して得られたものかわかりにくくなる。わかりやすくするために，各肯定否定式に番号をつけることにする。

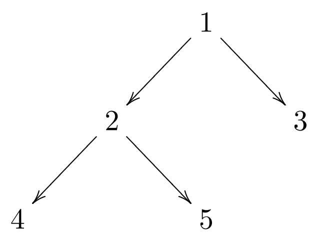
(1) k 番の式を分解して 1 つの式になったときは，同じ k 番を続ける。

(2) 2 つに分かれたときは，一方を $2k$ 番，もう一方を $(2k+1)$ 番とする。

例 1. $((A \wedge B) \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C))$ （これを φ とおく）を調べる。
$\neg\varphi$ が矛盾するかどうか，その積和形 $\mathrm{dnf}(\neg\varphi)$ を求めるのだから，否定部に φ があるだけの肯定否定式から始める。

1 :		$\mid$	$((A \wedge B) \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C))$	(否定部の $\to$)
1 :	$(A \wedge B) \to C$	$\mid$	$(A \to C) \vee (B \to C)$	(否定部の$\vee$)
1 :	$(A \wedge B) \to C$	$\mid$	$A \to C,\ B \to C$	(否定部の $\to$)
1 :	$(A \wedge B) \to C,\ A$	$\mid$	$C,\ B \to C$	(否定部の $\to$)
1 :	$(A \wedge B) \to C,\ A,\ B$	$\mid$	C	(肯定部の $\to$)
2 :	$A,\ B$	$\mid$	$A \wedge B,\ C$	(否定部の$\wedge$)
4 :	$A,\ B$	$\mid$	$A,\ C$	(矛盾)
5 :	$A,\ B$	$\mid$	$B,\ C$	(矛盾)
3 :	$C,\ A,\ B$	$\mid$	C	(矛盾)

すべての基本積が矛盾して消えたので，φ は恒真である。
なお，枝分かれの様子を図にすると下のようになる。

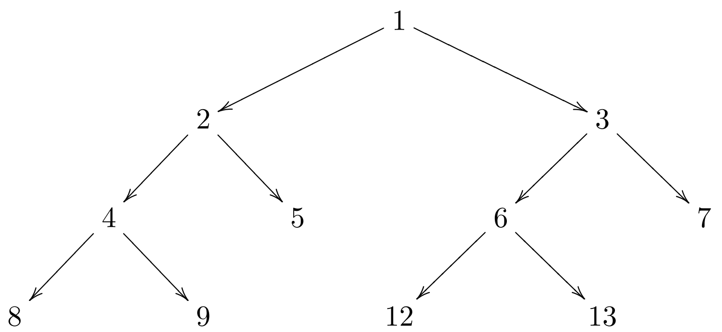


例 2. $((A \wedge B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$ （これを φ とおく）はどうか。

1 :		$\mid$	$((A \wedge B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$	(否定部の $\to$)
1 :	$(A \wedge B) \to C$	$\mid$	$(A \to C) \wedge (B \to C)$	(否定部の$\wedge$)
2 :	$(A \wedge B) \to C$	$\mid$	$A \to C$	(否定部の $\to$)
2 :	$(A \wedge B) \to C,\ A$	$\mid$	C	(肯定部の $\to$)
4 :	A	$\mid$	$A \wedge B,\ C$	(否定部の$\wedge$)
8 :	A	$\mid$	$A,\ C$	(矛盾)
9 :	A	$\mid$	$B,\ C$	(基本積 $A\overline{B}\,\overline{C}$)
5 :	$C,\ A$	$\mid$	C	(矛盾)
3 :	$(A \wedge B) \to C$	$\mid$	$B \to C$	(否定部の $\to$)
3 :	$(A \wedge B) \to C,\ B$	$\mid$	C	(肯定部の $\to$)
6 :	B	$\mid$	$A \wedge B,\ C$	(否定部の$\wedge$)
12 :	B	$\mid$	$A,\ C$	(基本積$\overline{A}\,B\overline{C}$)
13 :	B	$\mid$	$B,\ C$	(矛盾)
7 :	$C,\ B$	$\mid$	C	(矛盾)

基本積が残ったので，φ は恒真ではない。$\mathrm{dnf}(\neg\varphi)$ は $A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,B\overline{C}$ である。すなわち，(A, B, C) が (真, 偽, 偽) と (偽, 真, 偽) のとき φ が偽になる。

分解の樹形図は次のようになる。



1.3 付録

1.3.1 基本的な同値命題

次の同値関係が成り立つ。すなわち，命題変数にどんな値を代入しても，両辺の値が一致する。

交換法則	$\varphi \wedge \psi$	$\Leftrightarrow$	$\psi \wedge \varphi$
	$\varphi \vee \psi$	$\Leftrightarrow$	$\psi \vee \varphi$
結合法則	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$\Leftrightarrow$	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$
	$\varphi \vee (\psi \vee \chi)$	$\Leftrightarrow$	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi$
分配法則	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$	$\Leftrightarrow$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$
	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	$\Leftrightarrow$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
二重否定の原理	$\neg\neg\varphi$	$\Leftrightarrow$	φ
ド・モルガンの法則	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$
	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$
吸収法則	$(\varphi \vee \psi) \wedge \psi$	$\Leftrightarrow$	ψ
	$(\varphi \wedge \psi) \vee \psi$	$\Leftrightarrow$	ψ
	$(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\psi$	$\Leftrightarrow$	$\varphi \wedge \neg\psi$
	$(\varphi \wedge \psi) \vee \neg\psi$	$\Leftrightarrow$	$\varphi \vee \neg\psi$
$\to$ の性質	$\varphi \to \psi$	$\Leftrightarrow$	$\neg\varphi \vee \psi$
	$\neg(\varphi \to \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\varphi \wedge \neg\psi$
$\equiv$ の性質	$\varphi \equiv \psi$	$\Leftrightarrow$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
	$\neg(\varphi \equiv \psi)$	$\Leftrightarrow$	$(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$

1.3.2 ギリシャ文字

英語表記	読み方	大文字	小文字	英語表記	読み方	大文字	小文字
alpha	アルファ	A	α	*nu*	ニュー	N	ν
beta	ベータ	B	β	*xi*	クサイ	Ξ	ξ
gamma	ガンマ	Γ	γ	*omicron*	オミクロン	O	o
delta	デルタ	Δ	δ	*pi*	パイ	Π	π, ϖ
epsilon	イプシロン	E	ϵ, ε	*rho*	ロー	P	ρ, ϱ
zeta	ジータ	Z	ζ	*sigma*	シグマ	Σ	σ, ς
eta	イータ	H	η	*tau*	タウ	T	τ
theta	シータ	Θ	θ, ϑ	*upsilon*	ウプシロン	Υ	υ
iota	イオタ	I	ι	*phi*	ファイ	Φ	ϕ, φ
kappa	カッパ	K	κ	*chi*	カイ	X	χ
lambda	ラムダ	Λ	λ	*psi*	プサイ	Ψ	ψ
mu	ミユー	M	μ	*omega*	オメガ	Ω	ω