1　2次曲線

2次曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ を標準形に変換する。

1.1　回転移動して $b=0$ にする

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

を原点のまわりに θだけ回転したものを

$$a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0$$

とおく。

$$\begin{aligned}
& a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f' \\
= \quad & a(x\cos\theta+y\sin\theta)^2 \\
& +b(x\cos\theta+y\sin\theta)(-x\sin\theta+y\cos\theta) \\
& +c(-x\sin\theta+y\cos\theta))^2 \\
& +d(x\cos\theta+y\sin\theta) \\
& +e(-x\sin\theta+y\cos\theta) \\
& +f \\
= \quad & (a\cos^2\theta-b\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta)x^2 \\
& +(2a\sin\theta\cos\theta+b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2c\sin\theta\cos\theta)xy \\
& +(a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta)y^2 \\
& +(d\cos\theta-e\sin\theta)x \\
& +(d\sin\theta+e\cos\theta)y \\
& +f \\
= \quad & \frac{1}{2}\left((a+c)+(a-c)\cos2\theta-b\sin2\theta\right)x^2 \\
& +\left((a-c)\sin2\theta+b\cos2\theta\right)xy \\
& +\frac{1}{2}\left((a+c)-(a-c)\cos2\theta+b\sin2\theta\right)y^2 \\
& +(d\cos\theta-e\sin\theta)x \\
& +(d\sin\theta+e\cos\theta)y \\
& +f
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\frac{c-a}{b} \qquad \left(c\neq a \text{ のとき } \tan2\theta=\frac{b}{c-a} \text{ と同じ}\right)$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{c-a}{b} \qquad \left(c\neq a \text{ のとき } \theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{b}{c-a} \text{ と同じ}\right)$$

とすると，$b'=0$ になる。

1.2　平行移動して $ad = 0, ce = 0$ にする

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

を x 方向に p，y 方向に q だけ平行移動したものを

$$a'x^2 + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0$$

とおく。

$$\begin{aligned}
&a'x^2 + c'y^2 + d'x + e'y + f' \\
=&a(x+p)^2 + c(y+q)^2 + d(x+p) + e(y+q) + f \\
=&ax^2 + cy^2 + (2ap+d)x + (2cq+e)y + ap^2 + cq^2 + dp + eq + f
\end{aligned}$$

ゆえに

$$p = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ -\dfrac{d}{2a} & (a \neq 0) \end{cases} \qquad q = \begin{cases} 0 & (c = 0) \\ -\dfrac{e}{2c} & (c \neq 0) \end{cases}$$

とすると，$a'd' = 0, c'e' = 0$ になる。

1.3　$ac=0$ の場合

$ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$ $(ad=0, ce=0, ac=0)$
放物線（または平行線）である。

1.3.1　$a=0$ にする

$a \neq 0$ のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転する。
$cy^2+dx+f=0$ となる。

1.3.2　$c=1$ にする

c でわる。
$y^2+dx+f=0$ となる。

1.3.3　$d \leqq 0$ にする

$d>0$ のとき，$-\pi$ だけ回転する。
$y^2+dx+f=0$ $(d \leqq 0)$ となる。

1.3.4　結論

(1)　$d=0$ のとき

$$y^2=-f$$
$$\begin{cases} 2\text{ 直線} \quad y=\pm\sqrt{-f} & (f<0 \text{ のとき}) \\ 1\text{ 直線} \quad y=0 & (f=0 \text{ のとき}) \\ \text{なし} & (f>0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)　$d<0$ のとき

x 方向に $\dfrac{f}{d}$ だけ平行移動する。

$$\text{放物線} \quad y^2=-dx$$

1.4 $ac > 0$ の場合

$ax^2 + cy^2 + f = 0$ $(ac > 0)$
楕円である。

1.4.1 $f = 0$ のとき

$$1\text{点}\quad (0, 0)$$

1.4.2 $af > 0$ のとき

なし

1.4.3 $a = c$ のとき

$$\text{円}\quad x^2 + y^2 = -\frac{f}{a}$$

1.4.4 $f = -1$ にする

$-f$ でわる。
$ax^2 + cy^2 - 1 = 0$ $(a > 0)$ となる。

1.4.5 $a < c$ とする

$a > c$ のとき，$\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転する。
$ax^2 + cy^2 - 1 = 0$ $(0 < a < c)$ となる。

$$\text{楕円}\quad \frac{x^2}{\frac{1}{a}} + \frac{y^2}{\frac{1}{c}} = 1$$

1.5 $ac < 0$ の場合

$ax^2 + cy^2 + f = 0\ (ac < 0)$
双曲線（交わる 2 直線）である。

1.5.1 $f = 0$ のとき

$$2\text{ 直線}\quad y = \pm\sqrt{-\frac{a}{c}}\,x$$

1.5.2 $f = -1$ にする

$-f$ で割る
$ax^2 + cy^2 - 1 = 0$ になる。

1.5.3 $a > 0$ にする

$a < 0$ のとき $\frac{\pi}{2}$ だけ回転する。
$ax^2 + cy^2 - 1 = 0\ (a > 0)$ になる。

$$\text{双曲線}\quad \frac{x^2}{\frac{1}{a}} - \frac{y^2}{\frac{1}{-c}} = 1$$