17　有理関数の積分

有理関数，すなわち $\dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ の形をしている関数の積分は次の手順に従って計算します。

(1) 「分子の次数 $\geqq$ 分母の次数」の場合。
分子 $\div$ 分母 $=$ 商 $\cdots$ 余り を計算して，

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \text{商} + \frac{\text{余り}}{\text{分母}}$$

と変形する。商は多項式だから簡単に積分できる。

「余りの次数 $<$ 分母の次数」だから，以下「分子の次数 $<$ 分母の次数」とする。

(2) 分母を因数分解する。

$$\text{分母} = (1\text{ 次式}_1)^{m_1} \cdots (1\text{ 次式}_i)^{m_i} (2\text{ 次式}_1)^{n_1} \cdots (2\text{ 次式}_k)^{n_k}$$

とできる。

(3) 部分分数に分解する。

$$\begin{aligned}
\frac{\text{分子}}{\text{分母}} \quad = \quad & \frac{\text{定数}_{i,1}}{1\text{ 次式}_1} + \frac{\text{定数}_{i,2}}{(1\text{ 次式}_1)^2} + \cdots + \frac{\text{定数}_{i,m_1}}{(1\text{ 次式}_1)^{m_1}} \\
& + \cdots \\
& + \frac{\text{定数}_{i,1}}{1\text{ 次式}_i} + \frac{\text{定数}_{i,2}}{(1\text{ 次式}_i)^2} + \cdots + \frac{\text{定数}_{i,m_1}}{(1\text{ 次式}_i)^{m_i}} \\
& + \frac{1\text{ 次式}_{1,1}}{2\text{ 次式}_1} + \frac{1\text{ 次式}_{1,2}}{(2\text{ 次式}_1)^2} + \cdots + \frac{1\text{ 次式}_{1,n_1}}{(2\text{ 次式}_1)^{n_1}} \\
& + \cdots \\
& + \frac{1\text{ 次式}_{k,1}}{2\text{ 次式}_k} + \frac{1\text{ 次式}_{k,2}}{(2\text{ 次式}_k)^2} + \cdots + \frac{1\text{ 次式}_{k,n_k}}{(2\text{ 次式}_k)^{n_k}}
\end{aligned}$$

とできる。

(4) 分母が $(1\text{ 次式})^m$ の場合

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{ax+b}\,dx &= \frac{1}{a}\log|ax+b| + C \\
\int \frac{1}{(ax+b)^m}\,dx &= -\frac{1}{a(m-1)}\frac{1}{(ax+b)^{m-1}} + C
\end{aligned}$$

(5) 分母が (2 次式)^n の場合

$$\frac{\text{分子}}{(2\text{ 次式})^n} = \frac{\text{定数}_1((2\text{ 次式})')}{(2\text{ 次式})^n} + \frac{\text{定数}_2}{(2\text{ 次式})^n}$$

の形に分解する。

$$\begin{aligned}
\int \frac{(2\text{ 次式})'}{2\text{ 次式}}\,dx &= \log|2\text{ 次式}| + C \\
\int \frac{(2\text{ 次式})'}{(2\text{ 次式})^n}\,dx &= -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(2\text{ 次式})^{n-1}} + C \\
\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}\,dx &= \int \frac{1}{\left((x-p)^2+q^2\right)^n}\,dx \\
&\quad (x = p + q\tan\theta \text{ と置換する})
\end{aligned}$$

例 17.1 次の積分を計算しなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{(x^2-2x+5)^2}\,dx$

[**答**]

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{3x^3-x^2}{x^3-x^2-x+1} &= 3 + \frac{2x^2+3x-3}{x^3-x^2-x+1} \\
&= 3 + \frac{2x^2+3x-3}{(x-1)^2(x+1)} \\
&= 3 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^3-x^2}{x^3-x^2-x+1}\,dx &= \int \left(3 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&= 3x + 3\log|x-1| - \frac{1}{x-1} - \log|x+1| + c \\
&= 3x - \frac{1}{x-1} + \log\left|\frac{(x-1)^3}{x+1}\right| + C
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(x^2-2x+5)^2} &= \frac{x^2-2x+5+2x-5}{(x^2-2x+5)^2} \\
&= \frac{1}{x^2-2x+5}+\frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}-\frac{3}{(x^2-2x+5)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx &= \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx \\
&= \left[\ \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)\ \right]_1^3 \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}(0)\right) \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}\,dx &= \int_1^3 \frac{(x^2-2x+5)'}{(x^2-2x+5)^2}\,dx \\
&= \left[\ -\frac{1}{x^2-2x+5}\ \right]_1^3 \\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx &= \int_{x=1}^{x=3} \frac{3}{\left((x-1)^2+4\right)^2}\,dx \\
&\qquad \left(x=1+2\tan\theta \quad \text{とおくと} \quad \frac{dx}{d\theta}=2(1+\tan^2\theta)\right) \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \frac{3}{\left((x-1)^2+4\right)^2}\,\frac{dx}{d\theta}d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{3}{16(\tan^2\theta+1)^2}2(1+\tan^2\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{3}{8(\tan^2\theta+1)^2}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{3}{8}\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{3}{16}(1+\cos 2\theta)\,d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\ \frac{3}{16}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\ \right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{3}{16}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3\pi}{64}+\frac{3}{32}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{x^2}{(x^2-2x+5)^2}\,dx &= \frac{\pi}{8}+\frac{1}{8}-\frac{3\pi}{64}-\frac{3}{32}\\ &= \frac{5\pi+2}{64}\end{aligned}$$

問題 17.1 次の積分を計算しなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{4x^3-7x+2}{2x^2-x-3}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3-5x^2+5x+6}{x^2-6x+9}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x^2}{(x^2-2x+4)^2}\,dx$