1　微分方程式の基本概念

1.1　微分方程式とは

微分方程式は，x, y と $y', y'', y''', \ldots$ の間の関係を表す式である。x, y は必ずしも含まれなくてもよいが，$y', y'', y''', \ldots$ のどれかが必ず含まれている。y' があって $y'', \ldots$ がない微分方程式を **1 階**の微分方程式という。

y'' があって $y''', \ldots$ がない（y' はあってもなくてもよい）微分方程式を **2 階**の微分方程式という。以下，3 階，4 階，... の微分方程式も同様に定める。

例 1.

(1)　$xy' - 2y = 0$　1 階
(2)　$y'' = -4y$　2 階
(3)　$y'' + 4y' + 4y = x$　2 階

関数 $y = f(x)$ （とその導関数 $y' = f'(x)$） が与えられた微分方程式を満たすとき，$y = f(x)$ をその微分方程式の**解**という。

例 2.　例 1 の微分方程式の解

(1)　$y = Ax^2$　(A は任意の定数)
(2)　$y = A\sin 2x + B\cos 2x$　(A, B は任意の定数)
(3)　$y = (A + Bx)e^{-2x} + \dfrac{x-1}{4}$　(A, B は任意の定数)

問　解であることを確かめよ。

この例のように，一階の微分方程式の解は任意の定数を 1 つ含み，2 階の微分方程式の解は任意の定数を 2 つ含む。

1.2　二次関数を解にもつ微分方程式

二次関数

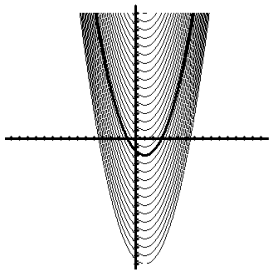
$$y = a(x-p)^2 + q \tag{1.1}$$

のグラフは，頂点が (p, q) の放物線で，a によって大きさと向きが定まる[*1]。

式 (1.1) を微分すると

$$y' = 2a(x-p) \tag{1.2}$$

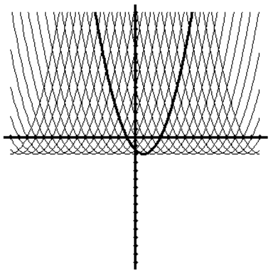
式 (1.2) を満たす関数は，(1.1) だけではない。実際，(1.2) を積分すると



$$y = a(x-p)^2 + Q \qquad (Q \text{ は任意の定数}) \tag{1.3}$$

すなわち，(1.1) と大きさ (a によって定まる) と頂点の x 座標 (p) が同じで，頂点の y 座標だけが異なる無数の放物線を表している。それは (1.1) の放物線を上下に（y 軸と平行に）移動したものである。

式 (1.1) と (1.2) から p を消去すると



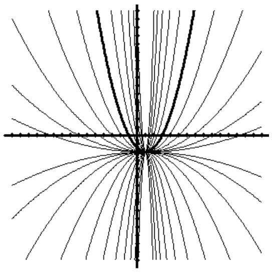
$$y = a\left(\frac{y'}{2a}\right)^2 + q = \frac{(y')^2}{4a} + q$$
$$\therefore \qquad (y')^2 = 4a(y-q) \tag{1.4}$$

式 (1.4) を満たす関数は,

$$y = a(x-P)^2 + q \qquad (P \text{ は任意の定数}) \tag{1.5}$$

すなわち，(1.1) を左右に（x 軸に平行に）移動した放物線全体である。

また，式 (1.1) と (1.2) から a を消去すると



$$y = \frac{y'}{2(x-p)}(x-p)^2 + q = \frac{(x-p)y'}{2} + q$$
$$\therefore \qquad y' = \frac{2(y-q)}{x-p} \tag{1.6}$$

式 (1.6) を満たす関数は,

$$y = A(x-p)^2 + q \qquad (A \text{ は任意の定数}) \tag{1.7}$$

すなわち，頂点が (1.1) と一致している大きさが様々の放物線全体である。

[*1] 放物線はすべて同じ形をしている（相似である）が，a の値によって大きさが異なる。$|a|$ が大きいと放物線は小さい。実際，$y = ax^2$ は $y = x^2$ を $\dfrac{1}{a}$ 倍に縮小した放物線である。

式 (1.2),(1.4),(1.6) のように，y' と x, y との関係を示している式を一階の (常) 微分方程式という。それぞれを満たす関数 (1.3),(1.5),(1.7) をその一般解という。一階の微分方程式の一般解は，上の例の Q, P, A のように任意の値をとる未定定数を 1 個含む。

式 (1.2) をさらに微分すると

$$y'' = 2a \tag{1.8}$$

これは，元々あった定数のうち p と q が消えている。(1.8) を 2 回積分すると一般解が得られる。

$$y = ax^2 + Bx + C \qquad (B, C \text{ は任意の定数}) \tag{1.9}$$

これは

$$y = a(x - P)^2 + Q \qquad (P, Q \text{ は任意の定数}) \tag{1.10}$$

と表すこともできる。頂点 (P, Q) はどこでもよいが，大きさを定める a が元のままである。したがって，大きさが元の放物線 (1.1) と同じすべての放物線を表している。

式 (1.8) のように y'' と x, y, y' との関係を示している式を二階 (常) 微分方程式という。その一般解は未定定数を 2 個含む。

1.3 問題

下記の文章は，円について同様の微分方程式を考えたものである。空所を埋めて完成せよ。

中心が (a, b) で半径が r の円

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{1.11}$$

を考える。

式 (1.11) を x で微分すると，

$$\boxed{} \tag{1.12}$$

これは，r が消えているので，中心が (a, b) で大きさが任意のすべての円を表している。

式 (1.11) と (1.12) から $(x - a)$ を消去すると

$$\boxed{} \tag{1.13}$$

これは，a が消えているので，元の円 (1.11) を左右に移動した円全体を表している。

式 (1.12) をさらに x で微分すると

$$\boxed{} \tag{1.14}$$

式 (1.13) と (1.14) から $(y - b)$ を消去すると

$$\boxed{} \tag{1.15}$$

a と b が消えたので，中心はどこでもよい。大きさが一定 (半径 r) の円全体を表している二階の微分方程式である。

1.4 解答

中心が (a,b) で半径が r の円

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1.11}$$

を考える。

式 (1.11) を x で微分すると，

$$\begin{aligned} &2(x-a)+2(y-b)y'=0 \\ &\therefore\ (x-a)+(y-b)y'=0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

これは，r が消えているので，中心が (a,b) で大きさが任意のすべての円を表している。

式 (1.11) と (1.12) から $(x-a)$ を消去すると

$$(y-b)^2\left(1+(y')^2\right)=r^2 \tag{1.13}$$

これは，a が消えているので，元の円 (1.11) を左右に移動した円全体を表している。

式 (1.12) をさらに x で微分すると

$$1+(y')^2+(y-b)y''=0 \tag{1.14}$$

式 (1.13) と (1.14) から $(y-b)$ を消去すると

$$r^2(y'')^2=\left(1+(y')^2\right)^3 \tag{1.15}$$

a と b が消えたので，中心はどこでもよい。大きさが一定 (半径 r) の円全体を表している二階の微分方程式である。