

2 分数関数の積分

2.1

微分方程式を解くとき，積分の計算が必要である。分数関数の積分について復習する。

- (1) “分子の次数 \geq 分母の次数” のとき，
 “分子の次数 $<$ 分母の次数” となるように変形する。

例.

$$\frac{2x^2 + x - 5}{2x + 3}$$

$$= x - 1 - \frac{2}{2x + 3}$$

参考

$$\begin{array}{r} x \quad 1 \quad x^2 \quad x \quad 1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \hline 2 \quad 3 \quad) \quad 2 \quad 1 \quad -5 \\ \underline{2 \quad 3} \\ -2 \quad -5 \\ \underline{-2 \quad -3} \\ -2 \end{array}$$

- (2) 分母が因数分解できるとき，
 因数を分母にもつ分数に分解する。

例.

$$\frac{2x - 1}{x^2 + 4x + 3}$$

$$= \frac{2x - 1}{(x + 1)(x + 3)}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{7}{2}}{x + 3}$$

参考

$$\frac{2x - 1}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 3}$$

$$2x - 1 = A(x + 3) + B(x + 1)$$

$$= (A + B)x + 3A + B$$

$$\therefore \begin{cases} A + B = 2 \\ 3A + B = -1 \end{cases}$$

$$\therefore A = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{7}{2}$$

例.

$$\frac{2x + 3}{x^2 - 4x + 4}$$

$$= \frac{2x + 3}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{2}{x - 2} + \frac{7}{(x - 2)^2}$$

参考

$$\frac{2x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2}$$

$$2x + 3 = A(x - 2) + B$$

$$= Ax - 2A + B$$

$$\therefore \begin{cases} A = 2 \\ -2A + B = 3 \end{cases}$$

$$\therefore A = 2, \quad B = 7$$

- (3) “分子の次数 = 分母の次数 - 1” のとき ,
 “分子が (分母)' の定数倍” のものと “分子の次数 < 分母の次数 - 1” のものに分解する。

例.

参考

$$\begin{aligned} & \frac{x+2}{x^2-3x+4} & (x^2-3x+4)' = 2x-3 \\ & = \frac{\frac{1}{2}(2x-3) + \frac{7}{2}}{x^2-3x+4} \\ & = \frac{1}{2} \frac{2x-3}{x^2-3x+4} + \frac{7}{2} \frac{1}{x^2-3x+4} \end{aligned}$$

- (4) “分子が (分母)' の定数倍” のとき ,

$$\int \frac{(\text{分母})'}{\text{分母}} dx = \log |\text{分母}| + C \text{ を使う。}$$

例.

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+4} dx = \log |x^2-3x+4| + C$$

- (5) 分母が 2 次式のとき , 分母を平方完成して ,

$$\int \frac{1}{(x-p)^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x-p}{a} + C \text{ を使う。}$$

例.

$$\int \frac{1}{x^2-4x+8} dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+4} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x-2}{2} + C$$

2.2 問題

次の積分をしなさい。

- (1) $\int \frac{2x^2-3}{x+1} dx$
- (2) $\int \frac{x^2-3x-6}{x^2-4x+3} dx$
- (3) $\int \frac{11x-2}{2x^2-3x-2} dx$
- (4) $\int \frac{x^2+4x}{x^2+9} dx$
- (5) $\int \frac{2x^3-5x^2-10x+7}{x^2-3x-4} dx$
- (6) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3} dx$

2.3 解答

$$(1) F(x) = \int \frac{2x^2 - 3}{x + 1} dx$$

$$F(x) = \int \left(2x - 2 + \frac{-1}{x + 1} \right) dx$$

$$= x^2 - 2x - \log|x + 1| + C$$

$$1 \ 1 \ 2 \ 0 \ -3$$

$$\frac{2 \ -2}{2 \ 2}$$

$$\frac{-2 \ -3}{-2 \ -2}$$

$$\frac{-2 \ -2}{-1}$$

$$(2) F(x) = \int \frac{x^2 - 3x - 6}{x^2 - 4x + 3} dx$$

$$F(x) = \int \left(1 + \frac{x - 9}{(x - 1)(x - 3)} \right) dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3} \right) dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{4}{x - 1} + \frac{-3}{x - 3} \right) dx$$

$$= x + 4 \log|x - 1| - 3 \log|x - 3| + C$$

$$1 \ -4 \ 3 \) \frac{1}{1 \ -3 \ -6}$$

$$\frac{1 \ -4 \ 3}{1 \ -9}$$

$$x - 9 = (x - 3)A + (x - 1)B$$

$$x = 1 : -8 = -2A + 0B$$

$$x = 3 : -6 = 0A + 2B$$

$$(3) F(x) = \int \frac{11x - 2}{2x^2 - 3x - 2} dx$$

$$F(x) = \int \frac{11x - 2}{(2x + 1)(x - 2)} dx$$

$$= \int \left(\frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{x - 2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{2x + 1} + \frac{4}{x - 2} \right) dx$$

$$= \frac{3}{2} \log|2x + 1| + 4 \log|x - 2| + C$$

$$11x - 2 = (x - 2)A + (2x + 1)B$$

$$x = -\frac{1}{2} : -\frac{15}{2} = -\frac{5}{2}A + 0B$$

$$x = 2 : 20 = 0A + 5B$$

$$(4) \quad F(x) = \int \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 9} dx$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(1 + \frac{4x - 9}{x^2 + 9} \right) dx \\ &= \int \left(1 + \frac{2(2x) - 9}{x^2 + 9} \right) dx \\ &= \int \left(1 + 2 \cdot \frac{(x^2 + 9)'}{x^2 + 9} - \frac{9}{x^2 + 9} \right) dx \\ &= x + 2 \log |x^2 + 9| - \frac{9}{3} \tan^{-1} \frac{x}{3} + C \\ &= x + 2 \log |x^2 + 9| - 3 \tan^{-1} \frac{x}{3} + C \end{aligned}$$

$$(x^2 + 9)' = 2x$$

$$(5) \quad F(x) = \int \frac{2x^3 - 5x^2 - 10x + 7}{x^2 - 3x - 4} dx$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(2x + 1 + \frac{x + 11}{(x + 1)(x - 4)} \right) dx \\ &= \int \left(2x + 1 + \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 4} \right) dx \\ &= \int \left(2x + 1 + \frac{-2}{x + 1} + \frac{3}{x - 4} \right) dx \\ &= x^2 + x - 2 \log |x + 1| + 3 \log |x - 4| + C \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \quad -4 \quad \left. \begin{array}{ccc} 2 & 1 \\ 2 & -5 & -10 \\ 2 & -6 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{c} 7 \\ 7 \\ 7 \end{array} \\ \hline 1 \quad -2 \quad 7 \\ 1 \quad -3 \quad -4 \\ \hline 1 \quad 11 \end{array}$$

$$x + 11 = (x - 4)A + (x + 1)B$$

$$\begin{array}{l} x = -1 : \quad 10 = -5A + 0B \\ x = 4 : \quad 15 = 0A + 5B \end{array}$$

$$(6) \quad F(x) = \int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 3} dx$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(\frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{(x + 1)^2 + 2} \right) dx \\ &= \log |x^2 + 2x + 3| + \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

$$(x^2 + 2x + 3)' = 2x + 2$$