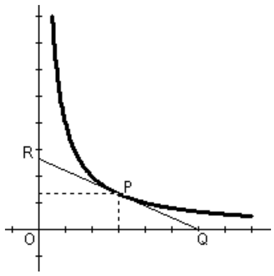
3　微分方程式を用いる具体例

微分方程式を使って解く図形問題の例を挙げる。解答は，与えられた条件から微分方程式を作る前半と，その微分方程式を解いて解を求める後半に分かれる。ここでは前半の微分方程式を作ることを目的とする。

3.1　例 1

曲線 C 上の任意の点 P における接線が x 軸，y 軸と交わり，それぞれの交点を Q,R とすると P が線分 QR の中点になっている。曲線 C が満たす微分方程式を求めよ。



解答　接点を P(a, b)，P における微分係数を m とする（C の方程式を $y = f(x)$ とすると，$b = f(a), m = f'(a)$ とおくということである）。

接線の方程式は

$$y = m(x - a) + b$$

ゆえに

$$\mathrm{Q} = \left(a - \frac{b}{m}, 0\right)$$
$$\mathrm{R} = (0, -am + b)$$

P が QR の中点になることから

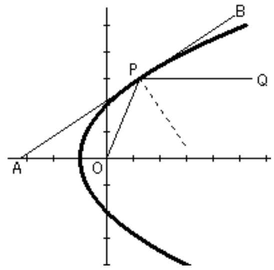
$$2b = 0 - am + b$$
$$\therefore\ am + b = 0$$

この関係が，任意の a について成り立つから，a, b, m を x, y, y' で書き換える。

$$xy' + y = 0 \tag{3.1}$$

3.2 例 2

原点 O から出た光が曲線 C に当たると，反射して x 軸に平行に進む (図 2-2)。
曲線 C が満たす微分方程式を求めよ。



解答 光は曲線に点 P で当たった後，P における法線（接線に垂直な直線）に関して対称な方向に進む。ゆえに,

$$\angle \mathrm{APO} = \angle \mathrm{BPQ}$$

反射した後の光線 PQ が x 軸と平行だから

$$\begin{aligned} & \angle \mathrm{BPQ} = \angle \mathrm{PAO} \quad (\text{同位角}) \\ \therefore \quad & \angle \mathrm{OPA} = \angle \mathrm{OAP} \\ \therefore \quad & \mathrm{OA} = \mathrm{OP} \end{aligned}$$

Pを (a, b)，P における微分係数を m とおくと，P における接線は,

$$y = m(x-a) + b$$

これと x 軸との交点 A の x 座標は

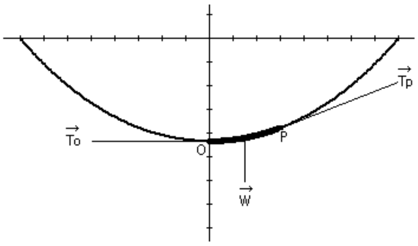
$$\begin{aligned} & 0 = m(x-a) + b \\ \therefore \quad & x = a - \frac{b}{m} \\ \therefore \quad & \mathrm{OA} = 0 - \left(a - \frac{b}{m}\right) = -a + \frac{b}{m} \\ \text{また} \quad & \mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \therefore \quad & -a + \frac{b}{m} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ & \frac{b}{m} = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ & m = \frac{b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

ゆえに

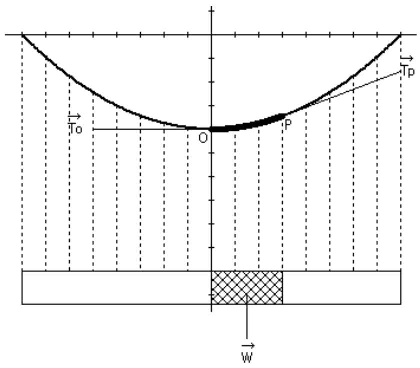
$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \tag{3.2}$$

3.3 例 3

(1) 電線は，自分自身の重さで垂れ下がっている。



(2) 吊り橋のワイヤーは，自分自身よりもはるかに重い橋の重さを支えて垂れ下がっている。



それぞれの曲線が満たす微分方程式を求めよ。

解答

曲線の最下点 O と任意の点 P の間の部分 $\widehat{\mathrm{OP}}$ を考えると，次の 3 つの力がつりあっている。

O より左の部分で引っ張られる張力 $\overrightarrow{\mathrm{T_O}}$（水平方向）。

P より右の部分で引っ張られる張力 $\overrightarrow{\mathrm{T_P}}$（接線方向）。

$\widehat{\mathrm{OP}}$ にかかる重力 $\overrightarrow{\mathrm{W}}$（鉛直方向）。

$\overrightarrow{\mathrm{T_P}}$ を水平方向と鉛直方向に分解した力が，それぞれ $\overrightarrow{\mathrm{T_O}}, \overrightarrow{\mathrm{W}}$ とつりあっているから，

$$m = \overrightarrow{\mathrm{T_P}}\text{の傾き} = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{W}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{T_O}}\right|}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{T_O}}\right|$ は，定点 O における張力だから定数である。
$\left|\overrightarrow{\mathrm{W}}\right|$ は，電線の場合は $\widehat{\mathrm{OP}}$ 自身の重さであるから，その長さ ℓ に比例する。しかし，吊り橋の場合は，橋の重さであるから水平の長さ a に比例する。

(1) **電線の場合**

$$m = k\ell \qquad (k \text{ は定数})$$

$$= k\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$\therefore\ m' = k\sqrt{1+(m)^2}$$

ゆえに

$$y'' = k\sqrt{1+(y')^2} \tag{3.3}$$

(2) **吊り橋の場合**

$$m = ka \quad (k \text{ は定数})$$

ゆえに

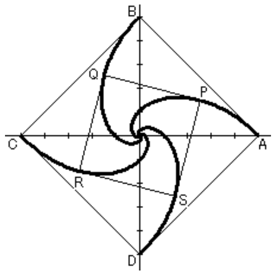
$$y' = kx \tag{3.4}$$

なお，この微分方程式はすぐ解ける。積分するだけである。

$$y = \frac{k}{2}x^2 + C$$

3.4 例 4

正方形の 4 つの頂点 A$(1,0)$, B$(0,1)$, C$(-1,0)$, D$(0,-1)$ にミサイル M_A, M_B, M_C, M_D がある。ミサイル M_A はミサイル M_B を標的に設定されていて，常に M_B に向かって進んでいく。同様に，M_B は M_C に向かって，M_C は M_D に向かって，M_D は M_A に向かって進む。4 つのミサイルが同時に発射され等しい速度で追撃を始めると，いつか中心 O で激突して共倒れになる。ミサイル M_A の軌跡が満たす微分方程式を求めよ。



解答 ミサイル M_A がミサイル M_B を追跡しているので，M_A, M_B が点 P,Q に来たとき PQ は P における接線になっている。

また，点 Q は点 P を原点 O のまわりに90°回転した位置にある。ゆえに，P を (a,b) とすると Q は $(-b,a)$ となり，P における接線の傾きを m とすると m は PQ の傾きと等しいから

$$m = \frac{a-b}{-b-a} = \frac{b-a}{b+a}$$

ゆえに

$$y' = \frac{y-x}{y+x} \tag{3.5}$$

3.5 問題

曲線 C 上の任意の点Pにおける接線が x 軸，y 軸と交わり，それぞれの交点をQ, Rとすると Q が線分 PR の中点になっている。

曲線 C（が満たす微分方程式）を求めよ。

3.6 解答

接点を $\mathrm{P}(a,b)$，P における微分係数を m とする。
接線の方程式は

$$y = m(x-a) + b$$

ゆえに

$$\mathrm{Q} = \left(a - \frac{b}{m}, 0\right) \ , \quad \mathrm{R} = (0, -am + b)$$

Q が PR の中点になることから

$$0 = b - am + b$$
$$\therefore \ am = 2b$$

この関係が，任意の a について成り立つから，a, b, m を x, y, y' で書き換える。

$$xy' = 2y \tag{3.6}$$