4 変数分離形微分方程式

4.1

最も簡単な微分方程式は

$$y' = f(x)$$

の形に変形できるもので，単純に積分して一般解が得られる。

$$y = \int f(x)\,dx$$

次に簡単な微分方程式は

$$g(y)y' = f(x) \tag{4.1}$$

の形に変形できるもので，**変数分離形**と呼ばれる。これは両辺を積分して一般解が得られる。
左辺は置換積分により

$$\int g(y)y'\,dx = \int g(y)\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(y)\,dy$$

であるから，一般解は

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx \tag{4.2}$$

を計算して得られる。
$y' = \dfrac{dy}{dx}$ を分数とみなして，式 (4.1) の両辺に dx を掛けた式

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx \tag{4.3}$$

と書くこともある。(4.2) はこの両辺に $\int$ を付け足しただけである。この形を見ると，y が左辺に x が右辺に分離しているので，変数分離系という。

変数分離形

微分方程式	$g(y)y' = f(x)$
解法	$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$

4.2 例 1

次の性質をもつ曲線 C の方程式を求めよ（前回の例 1)。

曲線 C 上の任意の点 P における接線が x 軸，y 軸と交わり，それぞれの交点を Q,R とすると P は線分 QR の中点になる。

解答 前回の授業で，次の微分方程式が得られた。

$$xy' + y = 0 \tag{4.4}$$

すなわち

$$\frac{1}{y}y' = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\log|y| = -\log|x| + C_1$$

$$\log|x| + \log|y| = C_1$$

$$\log|xy| = C_1$$

$$|xy| = e^{C_1}$$

$$xy = \pm e^{C_1}$$

$\pm e^{C_1}$ を改めて C とおいて，次式を得る。

$$y = \frac{C}{x} \tag{4.5}$$

4.3 例 2

放射性元素は α 線，β 線，γ 線を放出して崩壊している。崩壊する量は残存している量に比例する。すなわち，残存している量を q，時間を t とすると

$$\frac{dq}{dt} = -aq \tag{4.6}$$

で表される。

q を t で表せ。

解答

$-$ の符号は減少していくことを示していて，a は元素によって定まる比例定数である。

(4.6) を解く。

$$\frac{1}{q}dq = -a\,dt$$

$$\log q = -at + C_1$$

$$q = e^{-at+C_1} = e^{C_1}e^{-at}$$

e^{C_1} を改めて C とおいて次式を得る。

$$q = Ce^{-at} \tag{4.7}$$

[解答終]

$t=0$ のときの量を q_0 とおくと

$$q_0 = Ce^0 = C$$

ゆえに

$$q = q_0 e^{-at} \tag{4.8}$$

放射性元素は一定の割合で減少していくので，半分になるまでの時間が一定である。この期間 T を半減期という。たとえば，ラジウムは $T = 1590$ 年，コバルト 60 は $T = 5.3$ 年，ラドンは $T = 3.82$ 日 である。

T を半減期とすると，(4.8) より

$$\frac{q}{2} = q_0 e^{-a(t+T)} = q_0 e^{-at}e^{-aT} = qe^{-aT}$$

$$\therefore \quad e^{-aT} = \frac{1}{2}$$

$$-aT = \log\frac{1}{2} = -\log 2$$

$$\therefore \quad a = \frac{\log 2}{T}$$

したがって，

$$q = q_0 e^{-\frac{\log 2}{T}t} \tag{4.9}$$

4.4 例 3

自分自身の重さで垂れ下がっている紐の形を**懸垂線**という（前回の例 3(1)）。
前回の例 3(1) で，懸垂線が満たす微分方程式を求めた。

$$y' = a\int_0^x \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$\therefore\ y'' = a\sqrt{1+(y')^2} \tag{4.10}$$

これは二階の微分方程式である。しかし，(y が含まれていないので，)$w = y'$ とおくと

$$w' = a\sqrt{1+w^2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}dw = a\,dx$$

となり変数分離形である。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\,dw = \int a\,dx$$

$$\log\left(w+\sqrt{1+w^2}\right) = ax + C_1$$

$x = 0$ のとき $w = y' = 0$ であるから

$$\log\left(0+\sqrt{1+0}\right) = C_1$$

$$\therefore\quad C_1 = 0$$

ゆえに

$$\log\left(w+\sqrt{1+w^2}\right) = ax$$

$$w+\sqrt{1+w^2} = e^{ax}$$

$$\sqrt{1+w^2} = e^{ax} - w$$

$$1 + w^2 = e^{2ax} - 2we^{ax} + w^2$$

$$2we^{ax} = e^{2ax} - 1$$

$$\therefore\quad w = \frac{e^{2ax}-1}{2e^{ax}} = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$$

$w = y'$ だから

$$y' = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$$

ゆえに

$$y = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a} + C \tag{4.11}$$

4.5 問題

次の微分方程式の一般解を求めよ。(求めた解を微分して，もとの微分方程式を満たすことを確認しなさい。)

(1) $y' = \dfrac{x}{y}$

(2) $y' = -2xy^2 + 3y^2$

(3) $y' = \sqrt{xy}$

(4) $y' = e^{2y}$

(5) $2xy' = y$

(6) $(\tan x)y' = 2y$

4.6 解答

(1) $y' = \dfrac{x}{y}$

$$yy' = x$$

$$\int y\ dy = \int x\ dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C_1 = \frac{1}{2}(x^2 + C)$$

$$y^2 = x^2 + C$$

$$y^2 - x^2 = C$$

（$y = \pm x$ を漸近線にもつ双曲線である。）

(2) $y' = -2xy^2 + 3y^2$

$$y' = (-2x + 3)y^2$$

$$\frac{1}{y^2}y' = -2x + 3$$

$$\int \frac{1}{y^2}\ dy = \int (-2x + 3)\ dx$$

$$-\frac{1}{y} = -x^2 + 3x + C$$

$$\frac{1}{y} = x^2 - 3x - C$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x - C}$$

(3) $y' = \sqrt{xy}$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}y' = \sqrt{x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\ dy = \int \sqrt{x}\ dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}C_1$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}C_1\right) = \frac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} + C\right)$$

$$y = \frac{1}{9}\left(x^{\frac{3}{2}} + C\right)^2$$

(4) $y' = e^{2y}$

$$e^{-2y}y' = 1$$

$$\int e^{-2y}\ dy = \int 1\ dx$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} = x + C_1$$

$$e^{-2y} = -2x - 2C_1 = -2x + C$$

$$-2y = \log(-2x + C)$$

$$y = -\frac{1}{2}\log(-2x + C)$$

$$y = -\log\sqrt{-2x + C}$$

(5) $2xy' = y$

$$\frac{2}{y}y' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{2}{y}\ dy = \int \frac{1}{x}\ dx$$

$$2\log|y| = \log|x| + C_1$$

$$2\log|y| - \log|x| = C_1$$

$$\log\left|\frac{y^2}{x}\right| = C_1$$

$$\left|\frac{y^2}{x}\right| = e^{C_1}$$

$$\frac{y^2}{x} = \pm e^{C_1} = C$$

$$y^2 = Cx$$

(6) $(\tan x)y' = 2y$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{\tan x} = \frac{2\cos x}{\sin x}$$

$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int \frac{2\cos x}{\sin x}\ dx$$

$$\log|y| = 2\log|\sin x| + C_1$$

$$\log|y| - \log\left|\sin^2 x\right| = C_1$$

$$\log\left|\frac{y}{\sin^2 x}\right| = C_1$$

$$\left|\frac{y}{\sin^2 x}\right| = e^{C_1}$$

$$\frac{y}{\sin^2 x} = \pm e^{C_1} = C$$

$$y = C\sin^2 x$$