5 初期値問題

一階の微分方程式の一般解は未定定数を１つ含んでいる。すなわち無数の関数を表している。初期条件が１つ与えられると，そのうちの１つの関数に定められる。これを**特殊解**という。

初期条件は，つぎのように与えられる。

$x = x_0$のとき $y = y_0$
点 (x_0, y_0) を通る
$y(x_0) = y_0$

微分方程式と共に初期条件が与えられている問題を**初期値問題**という。

例１ 初期値問題 $y' = x\sqrt{y},\ y(2) = 0$ を解け。

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$$
$$\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = x\,dx$$
$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$\sqrt{y} = \frac{1}{4}(x^2 + 2C)$$
$$y = \frac{1}{16}(x^2 + 2C)^2$$

初期条件より

$$0 = \frac{1}{16}(4 + 2C)^2$$
$$\therefore \quad C = -2$$

ゆえに

$$y = \frac{1}{16}(x^2 - 4)^2$$

例２ 曲線 C 上の任意の点 P における法線（P において接線と直行する直線）が x 軸，y 軸と交わり，それぞれの交点を Q,R とすると P が線分 QR の $1:2$ の内分点になっている。

このような曲線 C で，次の初期条件を満たすものを求めよ。

(1) 原点 $(0, 0)$ を通る。

(2) 点 $(2, 2)$ を通る。

(3) 点 $(4, 0)$ を通る。

$P(a,b)$ における接線の傾きを m とする。
法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{m}(x-a)+b$$

$$\therefore \quad y_R = \frac{a}{m}+b$$

題意より $3b = \dfrac{a}{m}+b$

$$\therefore \quad 2b = \frac{a}{m}$$

$$m = \frac{a}{2b}$$

ゆえに $y' = \dfrac{x}{2y}$

$$2yy' = x$$

$$\int 2y\,dy = \int x$$

$$y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\therefore \quad y^2 - \frac{x^2}{2} = C \qquad \cdots 一般解$$

(1)

$$C = 0 - \frac{0}{2} = 0$$

$$\therefore \quad y^2 - \frac{x^2}{2} = 0$$

$$\left(y = \pm\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

(2)

$$C = 4 - \frac{4}{2} = 2$$

$$\therefore \quad y^2 - \frac{x^2}{2} = 2$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$$

(3)

$$C = 0 - \frac{16}{2} = -8$$

$$\therefore \quad y^2 - \frac{x^2}{2} = -8$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$$

※ (2),(3) は (1) を漸近線にもつ双曲線である。

問題 1　次の初期値問題を解け。

(1) $y' = \dfrac{-2y}{x}, \quad y(1) = 2$

(2) $y' = xe^{-2y}, \quad y(0) = 1$

(3) $y' = -y\tan\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right), \quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$

(4) $y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{x}}, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}$

問題 2　原点を通る曲線 C 上の任意の点 P における法線が定点 A$(2,3)$ を通るという。曲線 C を求めよ。

解答 1

(1) $y' = \dfrac{-2y}{x}, \quad y(1) = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{x}$$

$$\frac{1}{y}dy = -2\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{y}\ dy = -2\int \frac{1}{x}\ dx$$

$$\log|y| = -2\log|x| + C_1$$

$$\log|y| + 2\log|x| = C_1$$

$$\log\left|yx^2\right| = C_1$$

$$yx^2 = \pm e^{C_1} = C$$

$$y = \frac{C}{x^2}$$

初期条件より

$$2 = \frac{C}{1}$$

$$\therefore \quad C = 2$$

$$y = \frac{2}{x^2}$$

(2) $y' = xe^{-2y}, \quad y(0) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-2y}$$

$$\int e^{2y}\ dy = \int x\ dx$$

$$\frac{1}{2}e^{2y} = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$e^{2y} = x^2 + C_2$$

$$2y = \log\left(x^2 + C_2\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\log\left(x^2 + C_2\right)$$

$$y = \log\sqrt{x^2 + C_2}$$

初期条件より

$$1 = \log\sqrt{C_2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{C_2} = e$$

$$C_2 = e^2$$

$$y = \log\sqrt{x^2 + e^2}$$

(3) $y' = -y\tan\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right), \quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$

$$\frac{y'}{y} = -\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{-\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}\,dx$$
$$\log|y| = \log\left|\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right| + C_1$$
$$\log\left|\frac{y}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}\right| = C_1$$
$$\frac{y}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \pm e^{C_1} = C_2$$
$$y = C_2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

初期条件より

$$\begin{aligned}
2 &= C_2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \\
&= C_2\cos\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{C_2}{2} \\
\therefore\ C_2 &= 4 \\
y &= 4\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

(4) $y' = \sqrt{\dfrac{1 - y^2}{x}}, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{\sqrt{x}}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$\sin^{-1} y = 2\sqrt{x} + C$$
$$y = \sin\left(2\sqrt{x} + C\right)$$

初期条件より

$$\frac{1}{2} = \sin C$$
$$\therefore \quad C = \frac{\pi}{6}$$
$$y = \sin\left(2\sqrt{x} + \frac{\pi}{6}\right)$$

解答 2

C 上の点 $\mathrm{P}(a, b)$ における接線の傾きを m とする。
法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{m}(x - a) + b$$

これが $\mathrm{A}(2, 3)$ を通るから

$$3 = -\frac{1}{m}(2 - a) + b$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{1}{m}(a - 2) + b - 3$$

$$a - 2 + (b - 3)m = 0$$

ゆえに，C は次の微分方程式を満たす。

$$x - 2 + (y - 3)y' = 0$$

$$\therefore \quad (y - 3)y' = -(x - 2)$$

$$\int (y - 3)\ dy = -\int (x - 2)\ dx$$

$$\frac{1}{2}(y - 3)\ 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + C_1$$

$$\therefore \quad (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2C_1$$

これが原点を通るから

$$(0 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 2C_1$$

$$\therefore \quad 2C_1 = 13$$

したがって

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$$