11　ベルヌーイの方程式

$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ の形をした微分方程式を，ベルヌーイの方程式という。

ベルヌーイの方程式の解法

step 1: 両辺に $(-n+1)y^{-n}$ をかける。

$$(-n+1)y^{-n}y' + (-n+1)P(x)y^{-n+1} = (-n+1)Q(x)$$

step 2: $w = y^{-n+1}$ とおくと，$w' = (-n+1)y^{-n}y'$ だから，

$$w' + (-n+1)P(x)w = (-n+1)Q(x) \qquad \cdots\cdots \text{線形微分方程式}$$

step 3: この解 $w = f(x)$ を求める。

step 4: $y^{-n+1} = f(x)$ を整理する。

例　$y' + \dfrac{y}{x} = -x^3y^3$

両辺に $-2y^{-3}$ をかける。

$$-2y^{-3}y' - \frac{2y^{-2}}{x} = 2x^3$$

$w = y^{-2}$ とおくと，$w' = -2y^{-3}y'$

$$w' - \frac{2}{x}w = 2x^3$$

$$F(x) = \int -\frac{2}{x}\,dx = -2\log|x| = \log x^{-2}$$

$$G(x) = e^{\log x^{-2}} = x^{-2}$$

$$H(x) = \int x^{-2}(2x^3)\,dx = \int 2x\,dx = x^2$$

$$w = \frac{x^2+C}{x^{-2}} = x^2(x^2+C)$$

$$y^{-2} = x^2(x^2+C)$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2(x^2+C)}$$

$$y = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2+C}}$$

問題

(1) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{y}$

(2) $y' + y = 4\cos x\; y^2$

(3) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x^3}}$

(4) (線形微分方程式)
第 1 象限にある曲線 C 上の任意の点Pにおける接線と y 軸との交点をQとすると，三角形OPQの面積が常に 2 になる。ただし，Oは原点である。このような曲線 C の方程式を求めよ。

解答

(1) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{y}$

両辺に $2y$ をかける。

$$2yy' - \frac{2y^2}{x} = 2$$

$w = y^2$ とおくと，$w' = 2yy'$

$$w' - \frac{2}{x}w = 2$$

$$F(x) = \int -\frac{2}{x}\ dx = -2\log|x| = \log x^{-2}$$

$$G(x) = e^{\log x^{-2}} = x^{-2}$$

$$H(x) = \int 2x^{-2}\ dx = -2x^{-1}$$

$$w = \frac{-2x^{-1} + C}{x^{-2}} = -2x + Cx^2$$

$$y^2 = Cx^2 - 2x$$

$$y = \pm\sqrt{Cx^2 - 2x}$$

(2) $y' + y = 4\cos x\ y^2$

両辺に $-y^{-2}$ をかけて，$w = y^{-1}$ とおく。

$$-y^{-2}y' - y^{-1} = -4\cos x$$
$$w' - w = -4\cos x$$
$$F(x) = \int -1\ dx = -x$$
$$G(x) = e^{-x}$$

$$\begin{aligned}
H(x) &= -4\int e^{-x}\cos x\ dx \\
&= -4\int \left(-e^{-x}\right)'\cos x\ dx \\
&= -4\left(-e^{-x}\cos x - \int -e^{-x}(-\sin x)\ dx\right) \\
&= -4\left(-e^{-x}\cos x - \int \left(e^{-x}\right)'(-\sin x)\ dx\right) \\
&= -4\left(-e^{-x}\cos x - \left(e^{-x}(-\sin x) - \int e^{-x}(-\cos x)\ dx\right)\right) \\
&= 4e^{-x}\left(\cos x - \sin x\right) + 4\int e^{-x}\sin x\ dx \\
&= 4e^{-x}\left(\cos x - \sin x\right) - H(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ 2H(x) &= 4e^{-x}\left(\cos x - \sin x\right) \\
H(x) &= 2e^{-x}\left(\cos x - \sin x\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w &= \frac{2e^{-x}\left(\cos x - \sin x\right) + C}{e^{-x}} \\
&= 2\left(\cos x - \sin x\right) + Ce^{x} \\
y &= \frac{1}{2\left(\cos x - \sin x\right) + Ce^{x}}
\end{aligned}$$

(3) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x^3}}$

両辺に $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ をかけて，$w = \sqrt{y}$ とおく。

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{2x} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$w' - \frac{1}{2x}w = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$F(x) = \int -\frac{1}{2x}\,dx = -\frac{1}{2}\log x$$

$$G(x) = e^{-\frac{1}{2}\log x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{x} \\
w &= \frac{-\frac{1}{x} + C}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \\
&= C\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\
y &= \left(C\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2
\end{aligned}$$

(4) (線形微分方程式)

第 1 象限にある曲線 C 上の任意の点Pにおける接線と y 軸との交点をQとすると，三角形OPQの面積が常に 2 になる。ただし，Oは原点である。このような曲線 C の方程式を求めよ。

P(a, b) における接線の傾きを m とおくと，
P における接線は

$$\begin{aligned}
& y = m(x-a) + b \\
\therefore \quad & y_{\mathrm{Q}} = -ma + b
\end{aligned}$$

したがって，三角形OPQの面積は

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PH} = \frac{1}{2}(-ma+b)a$$

$$\therefore\ 4 = -ma^2 + ab$$

これが任意の点Pについて成り立つから

$$-x^2y' + xy = 4$$

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{4}{x^2}$$

$$F(x) = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\log x$$

$$G(x) = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int \frac{1}{x}\left(-\frac{4}{x^2}\right)dx \\
&= \int -\frac{4}{x^3}\,dx = \frac{2}{x^2}
\end{aligned}$$

$$y = \frac{\frac{2}{x^2} + C}{\frac{1}{x}} = \frac{2}{x} + Cx$$