12　完全微分方程式

復習　偏微分　　2 変数関数 $z = f(x, y)$ について，

“y を定数と考えて x で微分する” ことを “x で偏微分する” といい，$f_x(x, y)$ と書く。

“x を定数と考えて y で微分する” ことを “y で偏微分する” といい，$f_y(x, y)$ と書く。

ふつうの微分は，$(f(x, y))' = f_x(x, y) + f_y(x, y)y'$ となる。

例　　$z = f(x, y) = x^3 + 4x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ のとき，

$$
\begin{aligned}
f_x(x, y) &= 3x^2 + 8xy - 3y^2 \\
f_y(x, y) &= 4x^2 - 6xy + 6y^2 \\
(f(x, y))' &= 3x^2 + 8xy + 4x^2y' - 3y^2 - 6xyy' + 6y^2y' \\
&= (3x^2 + 8xy - 3y^2) + (4x^2 - 6xy + 6y^2)y' \\
&= f_x(x, y) + f_y(x, y)y'
\end{aligned}
$$

$P(x, y) = f_x(x, y)$, $Q(x, y) = f_y(x, y)$ とおく。P をさらに y で偏微分した P_y と，Q をさらに x で偏微分した Q_x を考える。

例の続き

$$
\begin{aligned}
&P_y = 8x - 6y \\
&Q_x = 8x - 6y \\
&\therefore\ P_y = Q_x
\end{aligned}
$$

定理

一般に，$P_y = f_{xy}$ と $Q_x = f_{yx}$ が連続関数であれば $P_y = Q_x$ になる。
逆に，$P_y = Q_x$ ならば $f_x = P$ かつ $f_y = Q$ となる $f(x, y)$ がある。
このとき，$f(x, y)$ は次の 2 通りの形で表せる。

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \int P(x, y)\,dx + A(y) \qquad (A(y) \text{ は } x \text{ を含まない式}) \\
f(x, y) &= \int Q(x, y)\,dy + B(x) \qquad (B(x) \text{ は } y \text{ を含まない式})
\end{aligned}
$$

この 2 つの式を見比べれば，$A(y)$, $B(x)$，したがって $f(x, y)$ がわかる。

完全微分方程式

$P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ の形をしていて，$P_y=Q_x$ が成り立つものを完全微分方程式という。

完全微分方程式の解法

step 1: $P_y=Q_x$ を確かめる。

step 2: $f(x,y)=\displaystyle\int P(x,y)\,dx+A(y)$ の積分部分を計算する。

step 3: $f(x,y)=\displaystyle\int Q(x,y)\,dy+B(x)$ の積分部分を計算する。

step 4: 両者を比べて $A(y),B(x)$ を決定する。

step 5: $f(x,y)=C$ が解である。

例 $y'=-\dfrac{2xy^3-3}{3x^2y^2+5}$

$\underbrace{2xy^3-3}_{P}+(\underbrace{3x^2y^2+5}_{Q})y'=0$

$P_y=6xy^2$

$Q_x=6xy^2=P_y$

ゆえに，完全微分方程式である。

$f(x,y)=\displaystyle\int(2xy^3-3)\,dx+A(y)=x^2y^3-3x+A(y)$

$f(x,y)=\displaystyle\int(3x^2y^2+5)\,dy+B(x)=x^2y^3+5y+B(x)$

両者を比べて $A(y)=5y,\ B(x)=-3x$

$\therefore\ f(x,y)=x^2y^3-3x+5y$

ゆえに　$x^2y^3-3x+5y=C$

問題

(1) $y'=-\dfrac{x+2y}{2x+1}$

(2) $y'=\dfrac{2xye^{-x^2}}{e^{-x^2}+2y}$

(3) $y'=\dfrac{\log x-2xy}{x^2}$

(4) $\dfrac{4\log x+\log y}{x}+\dfrac{\log x-6\log y}{y}y'=0$

解答

(1) $y' = -\dfrac{x+2y}{2x+1}$

$$\underbrace{x+2y}_{P}+(\underbrace{2x+1}_{Q})y' = 0$$

$P_y = 2$
$Q_x = 2 = P_y$

ゆえに完全微分方程式である。

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (x+2y)\,dx + A(y) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2xy + A(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (2x+1)\,dy + B(x) \\ &= 2xy + y + B(x) \end{aligned}$$

$\therefore$ $A(y) = y$
$B(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

$\therefore$ $f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2xy + y$
$\dfrac{1}{2}x^2 + 2xy + y = C_1$
$x^2 + 4xy + 2y = C$

(2) $y' = \dfrac{2xye^{-x^2}}{e^{-x^2}+2y}$

$$\underbrace{2xye^{-x^2}}_{P}+(\underbrace{-e^{-x^2}-2y}_{Q})y' = 0$$

$P_y = 2xe^{-x^2}$
$Q_x = -e^{-x^2}(-2x) = P_y$

ゆえに完全微分方程式である。

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int 2xye^{-x^2}\,dx + A(y) \\ &= -ye^{-x^2} + A(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (-e^{-x^2}-2y)\,dy + B(x) \\ &= -e^{-x^2}y - y^2 + B(x) \end{aligned}$$

$\therefore$ $A(y) = -y^2$
$B(x) = 0$

$\therefore$ $f(x,y) = -e^{-x^2}y - y^2$
$e^{-x^2}y + y^2 = C$
$y\left(e^{-x^2}+y\right) = C$

(3) $y' = \dfrac{\log x - 2xy}{x^2}$

$$\underbrace{\log x - 2xy}_{P}+(\underbrace{-x^2}_{Q})y' = 0$$

$P_y = -2x$
$Q_x = -2x = P_y$

ゆえに完全微分方程式である。

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (\log x - 2xy)\,dx + A(y) \\ &= x\log x - x - x^2y + A(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int -x^2\,dy + B(x) \\ &= -x^2y + B(x) \end{aligned}$$

$\therefore$ $A(y) = 0$
$B(x) = x\log x - x$

$\therefore$ $f(x,y) = x\log x - x - x^2y$
$x(\log x - xy - 1) = C$

(4) $\dfrac{4\log x+\log y}{x}+\dfrac{\log x-6\log y}{y}y'=0$

$$\underbrace{\frac{4\log x+\log y}{x}}_{P}+\underbrace{\frac{\log x-6\log y}{y}}_{Q}y'=0$$

$$P_y=\frac{1}{xy}$$
$$Q_x=\frac{1}{xy}$$

ゆえに完全微分方程式である。

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int \frac{4\log x+\log y}{x}\,dx+A(y) \\ &= 2(\log x)^2+\log y\log x+A(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int \frac{\log x-6\log y}{y}\,dy+B(x) \\ &= \log x\log y-3(\log y)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad A(y)=-3(\log y)^2$$
$$B(x)=2(\log x)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(x,y) &= 2(\log x)^2+\log x\log y-3(\log y)^2 \\ &= (2\log x+3\log y)(\log x-\log y) \end{aligned}$$

$$(2\log x+3\log y)(\log x-\log y)=C$$