13 積分因子

完全微分方程式は

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0$$

の形をしていて,

$$P_y = Q_x, \quad \text{すなわち} \quad P_y - Q_x = 0$$

を満たすものであった。

$P_y - Q_x = 0$ でないときでも，両辺にうまい $M(x,y)$ をかけて

$$M(x,y)P(x,y)+M(x,y)Q(x,y)y'=0$$

が完全微分方程式になるようにできる場合がある。このような $M(x,y)$ を**積分因子**という。

積分因子 $M(x,y)$ は必ず存在するとは限らないし，存在する場合もそれを見つけることは容易でない。しかし，積分因子が x だけあるいは y だけの式の場合は，つぎのようにして見つけることができる。

x だけの式または y だけの式の積分因子

(1) $\dfrac{P_y - Q_x}{Q}$ が y を含まないとき

$$\begin{aligned} m(x) &= \int \frac{P_y - Q_x}{Q}\,dx \\ M(x) &= e^{m(x)} \qquad \text{が積分因子} \end{aligned}$$

(2) $\dfrac{P_y - Q_x}{P}$ が x を含まないとき

$$\begin{aligned} n(y) &= -\int \frac{P_y - Q_x}{P}\,dy \\ N(y) &= e^{n(y)} \qquad \text{が積分因子} \end{aligned}$$

例 $x^2 + y^2 + (x^3y^2 - xy)y' = 0$ （ただし $x > 0$）

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{P} + (\underbrace{x^3y^2 - xy}_{Q})y' = 0$$

$$\begin{aligned} P_y - Q_x &= 2y - (3x^2y^2 - y) \\ &= -3x^2y^2 + 3y \\ &= -3y(x^2y - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P_y - Q_x}{Q} &= \frac{-3y(x^2y-1)}{xy(x^2y-1)} \\ &= -\frac{3}{x} \quad \cdots y \text{ を含まない} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(x) &= \int -\frac{3}{x}\, dx \\ &= -3\log x = \log x^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x) &= e^{\log x^{-3}} \\ &= \frac{1}{x^3} \quad \cdots \text{積分因子} \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x^3} + \frac{x^3y^2 - xy}{x^3}y' = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3}}_{P} + \underbrace{\left(y^2 - \frac{y}{x^2}\right)}_{Q} y' = 0$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right) dx + A(y) \\ &= \log x - \frac{y^2}{2x^2} + A(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \left(y^2 - \frac{y}{x^2}\right) dy + B(x) \\ &= \frac{1}{3}y^3 - \frac{y^2}{2x^2} + B(x) \end{aligned}$$

$$\therefore\ f(x, y) = \frac{1}{3}y^3 - \frac{y^2}{2x^2} + \log x$$

ゆえに

$$\frac{1}{3}y^3 - \frac{y^2}{2x^2} + \log x = C$$

$$\therefore \quad 2x^2y^3 - 3y^2 + x^2(6\log x - C) = 0$$

問題

$x > 0,\ y > 0$ とする。

(1) $y' = \dfrac{1}{x} + 3xe^y$

(2) $y' = \dfrac{y - x^2}{x^2y^2 + x}$

(3) $y' = -\dfrac{2xy^2}{2\log y + 3x^2y + 1}$

(4) $y' = \dfrac{6x - y^2(2y - 3)}{12xy(y - 1)}$

解答

(1) $y' = \dfrac{1}{x} + 3xe^y$

$$\underbrace{(3x^2e^y + 1)}_{P} + \underbrace{(-x)}_{Q} y' = 0$$

$$
\begin{aligned}
P_y - Q_x &= 3x^2e^y + 1 \\
\frac{P_y - Q_x}{P} &= 1 \quad x\text{を含まない} \\
n(y) &= -\int 1\, dy = -y \\
N(y) &= e^{-y} \quad \cdots\text{積分因子}
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{(3x^2 + e^{-y})}_{P} + \underbrace{(-xe^{-y})}_{Q} y' = 0$$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \int (3x^2 + e^{-y})\, dx + A(y) \\
&= x^3 + xe^{-y} + A(y) \\
f(x,y) &= \int -xe^{-y}\, dy + B(x) \\
&= xe^{-y} + B(x) \\
\therefore\ f(x,y) &= xe^{-y} + x^3
\end{aligned}
$$

$$x(e^{-y} + x^2) = C$$

(2) $y' = \dfrac{y - x^2}{x^2y^2 + x}$

$$\underbrace{(x^2 - y)}_{P} + \underbrace{(x^2y^2 + x)}_{Q} = 0$$

$$
\begin{aligned}
P_y - Q_x &= -1 - (2xy^2 + 1) \\
&= -2(xy^2 + 1) \\
\frac{P_y - Q_x}{Q} &= \frac{-2(xy^2+1)}{x(xy^2+1)} \\
&= -\frac{2}{x} \quad \cdots y\text{を含まない} \\
m(x) &= \int -\frac{2}{x}\, dx \\
&= -2\log|x| \\
&= \log x^{-2} \\
M(x) &= e^{\log x^{-2}} \\
&= \frac{1}{x^2} \quad \cdots\text{積分因子}
\end{aligned}
$$

$$\frac{x^2 - y}{x^2} + \frac{x^2y^2 + x}{x^2} y' = 0$$

$$\underbrace{(1 - \frac{y}{x^2})}_{P} + \underbrace{\left(y^2 + \frac{1}{x}\right)}_{Q} y' = 0$$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \int \left(1 - \frac{y}{x^2}\right) dx + A(y) \\
&= x + \frac{y}{x} + A(y) \\
f(x,y) &= \int \left(y^2 + \frac{1}{x}\right) dy + B(x) \\
&= \frac{1}{3}y^3 + \frac{y}{x} + B(x) \\
\therefore\ f(x,y) &= \frac{y}{x} + x + \frac{1}{3}y^3
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$\frac{1}{3}y^3 + \frac{y}{x} + x = C_1$$

$$\therefore \quad xy^3 + 3y + 3x^2 - Cx = 0$$

(3) $y' = -\dfrac{2xy^2}{2\log y + 3x^2y + 1}$

$$\underbrace{2xy^2}_{P} + \underbrace{(2\log y + 3x^2y + 1)}_{Q} y' = 0$$

$P_y - Q_x \quad = 4xy - 6xy \quad = -2xy$

$$\begin{aligned} \frac{P_y - Q_x}{P} &= \frac{-2xy}{2xy^2} \\ &= -\frac{1}{y} \qquad x\text{を含まない} \end{aligned}$$

$n(y) \quad = -\displaystyle\int -\frac{1}{y}\ dy = \log y$

$N(y) \quad = e^{\log y} = y \qquad$ 積分因子

$$\underbrace{2xy^3}_{P} + \underbrace{(2y\log y + 3x^2y^2 + y)}_{Q} y' = 0$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int 2xy^3\ dx + A(y) \\ &= x^2y^3 + A(y) \\ f(x,y) &= \int (2y\log y + 3x^2y^2 + y)\ dy + B(x) \\ &= y^2\log y - \int y^2\frac{1}{y}\ dy \\ &\qquad + x^2y^3 + \frac{1}{2}y^2 + B(x) \\ &= y^2\log y - \frac{1}{2}y^2 + x^2y^3 + \frac{1}{2}y^2 \\ &= y^2\log y + x^2y^3 \\ \therefore\ f(x,y) &= y^2\log y + x^2y^3 \end{aligned}$$

ゆえに $\quad y^2(\log y + x^2y) = C_1$

(4) $y' = \dfrac{6x - y^2(2y-3)}{12xy(y-1)}$

$$\underbrace{(6x - 2y^3 + 3y^2)}_{P} + \underbrace{(-12x(y^2 - y))}_{Q} y' = 0$$

$$\begin{aligned} P_y - Q_x &= -6y^2 + 6y + 12(y^2 - y) \\ &= 6(y^2 - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P_y - Q_x}{Q} &= \frac{6(y^2 - y)}{-12x(y^2 - y)} \\ &= -\frac{1}{2x} \qquad y\text{を含まない} \end{aligned}$$

$m(x) \quad = \displaystyle\int -\frac{1}{2x}\ dx \quad = -\frac{1}{2}\log x$

$$\begin{aligned} M(x) &= e^{-\frac{1}{2}\log x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \cdots\text{積分因子} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\left(6\sqrt{x} + \frac{-2y^3 + 3y^2}{\sqrt{x}}\right)}_{P} + \underbrace{\left(-12\sqrt{x}\,(y^2 - y)\right)}_{Q} y' = 0$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int \left(6\sqrt{x} + \frac{-2y^3 + 3y^2}{\sqrt{x}}\right) dx + A(y) \\ &= 4x\sqrt{x} + (-4y^3 + 6y^2)\sqrt{x} + A(y) \\ f(x,y) &= \int -12\sqrt{x}\,(y^2 - y)\ dy + B(x) \\ &= -\sqrt{x}\,(4y^3 - 6y^2) + B(x) \\ \therefore\ f(x,y) &= -2\sqrt{x}\,(2y^3 - 3y^2) + 4x\sqrt{x} \end{aligned}$$

ゆえに

$$2\sqrt{x}\,(2x - 2y^3 + 3y^2) = C_1$$

$$\therefore \quad \sqrt{x}\,(2x - 2y^3 + 3y^2) = C$$