# 14　クレーローの方程式

今まで扱った微分方程式は，$y' = P(x, y)$ の形をしているか，それを変形したものであった。そのように表せない微分方程式のうち，$y = xy' + f(y')$ の形をしているものを**クレーローの方程式**という。

**クレーローの方程式 $y = xy' + f(y')$ の解法**

$t = y'$ とおく。

$$y = xt + f(t) \qquad \cdots (*)$$

$x$ で微分する。

$$\begin{aligned} y' &= t + xt' + f'(t)t' \\ 0 &= (x + f'(t))\,t' \qquad (\because\ t = y') \end{aligned}$$

ゆえに

$$t' = 0 \text{ または } x = -f'(t)$$

(1)　$t' = 0$ のとき，

$$t = C$$

$(*)$ に代入して

$$y = Cx + f(C) \quad \cdots \text{一般解}$$

(2)　$x = -f'(t)$ のとき，$(*)$ に代入して媒介変数表示が得られる。

$$\begin{cases} x = -f'(t) \\ y = -tf'(t) + f(t) \end{cases} \qquad \cdots \text{特異解}$$

できれば，$t$ を消去して $x$ と $y$ の方程式にする。

一般解は，傾きが $C$，$y$ 切片が $f(C)$ の直線群である。特異解はこのすべての直線に接する曲線（**包絡線**という）である。

**例** $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$

$t = y'$ とおく。

$$y = xt + \frac{1}{t}$$

x で微分する。

$$y' = t + xt' - \frac{t'}{t^2}$$
$$0 = \left(x - \frac{1}{t^2}\right)t'$$
$$\therefore\ t' = 0 \quad \text{または} \quad x = \frac{1}{t^2}$$

$t' = 0$ のとき

$$t = C$$
$$y = Cx + \frac{1}{C} \qquad \cdots \text{一般解}$$

$x = \dfrac{1}{t^2}$ のとき,

$$y = t\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} = \frac{2}{t}$$
$$\therefore\ y^2 = 4x \qquad \cdots \text{特異解}$$

**例** 横が長い長方形の紙の下から 2cm の線を $x$ 軸，その中央あたりを原点とする。長方形の下の辺のどこかが原点に重なるように折って折り目をはっきりつける。できるだけたくさん折り目をつける。すると折り目の包絡線が浮かび上がって見える。この曲線を求めよ。

曲線上の点を $\mathrm{P}(a, b)$ とし，その点における接線の傾きを $m$ とすると，接線は

$$y = m(x - a) + b = mx - ma + b$$

この接線に関して原点と対称な点を $\mathrm{Q}(x, y)$ とする。

$$y = -\frac{1}{m}x \qquad (\text{OQ} \perp \text{接線})$$
$$\frac{y}{2} = m\frac{x}{2} - ma + b \quad (\text{OQの中点が接線上})$$

この連立方程式を解いて

$$x = \frac{2m(ma - b)}{m^2 + 1}$$
$$y = \frac{-2(ma - b)}{m^2 + 1}$$

Q が長方形の下の辺，すなわち直線 $y = -2$ の上になるから

$$\frac{-2(ma - b)}{m^2 + 1} = -2$$
$$\therefore\ ma - b = m^2 + 1$$

$a, b, m$ を $x, y, y'$ で置き換えて微分方程式が得られる。

$$y'x - y = y'^2 + 1$$
$$\therefore\ y = xy' - y'^2 - 1$$

$t = y'$ とおく。

$$y = xt - t^2 - 1$$
$$y' = t + xt' - 2tt'$$
$$0 = (x - 2t)t'$$

$t' = 0$ のとき

$$t = C$$
$$\therefore\ y = Cx - C^2 - 1 \quad \cdots \text{一般解}$$

$x = 2t$ のとき

$$y = 2t^2 - t^2 - 1$$
$$\therefore\ y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad \cdots \text{包絡線}$$

**問題**

(1) $y = xy' - \log y'$

(2) 2 直線 $y = x$，$y = -x$ 上の点 $\mathrm{Q}(x, x)$ と $\mathrm{R}(-y, y)$ で $x + y = 2$ となるようなものを直線で結ぶ。このような直線の包絡線を求めよ。

## 解答

(1) $y = xy' - \log y'$

$y' = t$ とおく

$$y = xt - \log t$$

$$y' = t + xt' - \frac{t'}{t}$$

$$t'(\left(x - \frac{1}{t}\right) = 0$$

$$t' = 0 \quad \text{または} \quad x = \frac{1}{t}$$

(i) $t' = 0$ のとき

$$t = C$$

$$\therefore \ y = Cx - \log C \quad \cdots \text{一般解(接線群)}$$

(ii) $x = \dfrac{1}{t}$ のとき

$$y = 1 - \log t = 1 - \log \frac{1}{x}$$

$$\therefore \ y = \log x + 1 \quad \cdots \text{特異解(包絡線)}$$

(2) 曲線上の点 $\mathrm{P}(a, b)$ における接線の傾きを $m$ とすると，接線は

$$y = m(x - a) + b = mx - ma + b$$

$y = x$ との交点を $\mathrm{Q}(x, x)$ とすると

$$x = mx - ma + b$$

$$\therefore \ x = \frac{-ma + b}{1 - m}$$

$y = -x$ との交点を $\mathrm{R}(-y, y)$ とおくと

$$y = -my - ma + b$$

$$\therefore \ y = \frac{-ma + b}{1 + m}$$

ゆえに

$$\frac{-ma + b}{1 - m} + \frac{-ma + b}{1 + m} = 2$$

$$\frac{2(-ma + b)}{1 - m^2} = 2$$

$$-ma + b = 1 - m^2$$

$a, b, m$ を $x, y, y'$ で置き換える。

$$-y'x + y = 1 - y'^2$$

$$y = xy' + 1 - y'^2$$

$t = y'$ とおくと

$$y = xt + 1 - t^2$$

$$y' = t + xt' - 2tt'$$

$$t'(x - 2t) = 0$$

(i) $t' = 0$ のとき

$$t = C$$

$$\therefore \ y = Cx + 1 - C^2 \quad \cdots \text{一般解(接線群)}$$

(ii) $x = 2t$ のとき

$$y = 2t^2 + 1 - t^2 = y = t^2 + 1$$

$$\therefore \ y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \quad \cdots \text{特異解(包絡線)}$$