17　高階線形微分方程式

17.1　一般論

高階の微分方程式（$y'', y^{(3)}, \ldots$ 含む方程式）のうち $y, y', y'', \ldots$ が 1 次の項しかないもの，すなわち

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

の形をしたものを**線形**という。

特に，$q(x) = 0$ のもの，すなわち

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{17.1}$$

の形をしたものを**同次線形**という。

定理
$f_1(x), \ldots, f_n(x)$ が (17.1) の (特殊) 解ならば，それらの**線形結合** $C_1f_1(x) + \cdots + C_nf_n(x)$ も (17.1) の (特殊) 解である。

定義
n 個の関数 $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ が次の条件を満たすとき，それらは**線形独立**であるという。

$$\text{条件：}\quad C_1f_1(x) + \cdots + C_nf_n(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C_1 = \cdots = C_2 = 0$$

$\Leftarrow$ は常に成り立つから，本質は $\Rightarrow$ が成り立つことで，それは，

$$\text{条件：}\quad C_1f_1(x) + \cdots + C_nf_n(x) = 0 \quad \text{になるのは} \quad C_1 = \cdots = C_n = 0 \quad \text{のときだけである}$$

ということである。

線形独立でないとき，たとえば，$C_n \fallingdotseq 0$ だとすると

$$f_n(x) \quad = \frac{C_1}{C_n}f_1(x) + \cdots + \frac{C_{n-1}}{C_n}f_{n-1}(x)$$

と，f_n が他の $n-1$ 個の関数の線形結合で表せる。

関数群が線形独立とは，その中のどの関数も他の関数の線形結合で表せないということである。

定理

(1)　(17.1) の解は，線形独立な n 個の特殊解 $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ をもつ。

(2)　線形独立な n 個の関数 $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ が (17.1) の特殊解のとき，(17.1) の一般解は，それらの線形結合

$$C_1f_1(x) + \cdots + C_nf_n(x)$$

したがって，n 階の同次線形微分方程式を解くためには，線形独立な n 個の特殊解を求めればよい。

17.2　２階の同次線形微分方程式（定数係数）

ここでは，２階の同次線形微分方程式で係数 $p_k(x)$ が x を含まない式の解法を説明する。

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{17.2}$$

基本形

(1) **基本形１**：　$y'' = 0$

２つの線形独立な特殊解を見つけよう。

$$(\boxed{})'' = 0$$
$$(\boxed{})'' = 0$$
$$\therefore \quad y = C_1 \boxed{} + C_2 \boxed{}$$

(2) **基本形２**：　$y'' = a^2 y \quad (a \fallingdotseq 0)$

２つの線形独立な特殊解を見つけよう。

$$(\boxed{})'' = 0$$
$$(\boxed{})'' = 0$$
$$\therefore \quad y = C_1 \boxed{} + C_2 \boxed{}$$

(3) **基本形３**：　$y'' = -a^2 y \quad (a \fallingdotseq 0)$

２つの線形独立な特殊解を見つけよう。

$$(\boxed{})'' = 0$$
$$(\boxed{})'' = 0$$
$$\therefore \quad y = C_1 \boxed{} + C_2 \boxed{}$$

一般形

(17.2) は，$w = ye^{px} \quad \left(p = \dfrac{b}{2a}\right)$ とおくと基本形に帰着できる。

例　$y'' - 4y' + 2y = 0$

$w = ye^{-2x}$ とおく．

$$\begin{aligned} w' &= y'e^{-2x} - 2ye^{-2x} \\ w'' &= y''e^{-2x} - 2y'e^{-2x} - 2y'e^{-2x} + 4ye^{-2x} \\ &= (y'' - 4y' + 4y)e^{-2x} \\ &= 2ye^{-2x} \\ &= 2w \qquad \cdots \text{基本形２} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} \\ \therefore\ y &= we^{2x} = C_1 e^{(2+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(2-\sqrt{2})x} \end{aligned}$$

(17.2) の一般解と，(17.2) と同じ係数の二次方程式 $at^2 + bt + c = 0$ の解の間に，密接な関連が見られる。この二次方程式を (17.2) の **特性方程式** という。

問題　次の微分方程式の一般解と，特性方程式の解を求め，関連を調べよ。

(1) $y'' - 6y' + 9y = 0$ （$b^2 - 4ac = 0$ の場合）

(2) $y'' + 2y' - 3y = 0$ （$b^2 - 4ac > 0$ の場合）

(3) $y'' - 4y' + 7y = 0$ （$b^2 - 4ac < 0$ の場合）

解答

(1) $y'' - 6y' + 9y = 0$

$w = ye^{-3x}$ とおく

$$
\begin{aligned}
w' &= y'e^{-3x} - 3ye^{-3x} \\
w'' &= y''e^{-3x} - 3y'e^{-3x} - 3y'e^{-3x} + 9ye^{-3x} \\
&= (y'' - 6y' + 9)e^{-3x} \\
&= 0 \qquad \cdots \text{基本形 } 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ w &= C_1 + C_2 x \\
y &= we^{3x} \\
&= (C_1 + C_2 x)e^{3x}
\end{aligned}
$$

特性方程式は

$$
\begin{aligned}
& t^2 - 6t + 9 = 0 \\
& (t-3)^2 = 0 \\
\therefore\ & t = 3 \qquad (\text{重解})
\end{aligned}
$$

(2) $y'' + 2y' - 3y = 0$

$w = ye^{x}$ とおく

$$
\begin{aligned}
w'' &= (y'' + 2y' + y)e^{x} \\
&= 4w \qquad \cdots \text{基本形 } 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ w &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \\
y &= we^{-x} \\
&= (C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x})e^{-x} \\
&= C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}
\end{aligned}
$$

特性方程式は

$$
\begin{aligned}
& t^2 + 2t - 3 = 0 \\
& (t+3)(t-1) = 0 \\
\therefore\ & t = -3, 1 \qquad (\text{異なる 2 実数解})
\end{aligned}
$$

(3) $y'' - 4y' + 7y = 0$

$w = ye^{-2x}$ とおく

$$
\begin{aligned}
w'' &= (y'' - 4y' + 4y)e^{-2x} \\
&= -3w \qquad \cdots \text{基本形 } 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ w &= C_1 \sin\sqrt{3}\,x + C_2 \cos\sqrt{3}\,x \\
y &= we^{2x} \\
&= (C_1 \sin\sqrt{3}\,x + C_2 \cos\sqrt{3}\,x)e^{2x}
\end{aligned}
$$

特性方程式は

$$
\begin{aligned}
& t^2 - 4t + 7 = 0 \\
\therefore\ & t = 2 \pm \sqrt{3}\,i \qquad (\text{虚数解})
\end{aligned}
$$

(特性方程式との関係)

特性方程式が二重解 $t = \alpha$をもつとき	$y = (C_1 + C_2 x)e^{\alpha x}$
特性方程式が異なる 2 実数解 $t = \alpha, \beta$をもつとき	$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$
特性方程式が虚数解 $t = p \pm qi$ をもつとき	$y = (C_1 \sin qx + C_2 \cos qx)\, e^{px}$