18 高階線形微分方程式 (同次，定数係数)

18.1 2 階線形微分方程式 (同次，定数係数)

前回の問題の考察により，次のことがわかった。

微分方程式 $ay'' + by' + c = 0$ の解

特性方程式 $at^2 + bt + c = 0$ の解で場合分け

$t = \alpha$	(2 重実数解)	のとき	$y = (C_1 + C_2 x)e^{\alpha x}$
$t = \alpha, \beta$	(2 実数解)	のとき	$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$
$t = p \pm qi$	(2 虚数解)	のとき	$y = e^{px}\left(C_1 \sin qx + C_2 \cos qx\right)$

18.2 n 階線形微分方程式 (同次，定数係数)

n 階の線形微分方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

についても，特性方程式

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0$$

の解から，一般解が得られる。n 次方程式になると，多重解は 2 重実数解に限らない。3 重以上の解や，虚数の多重解もありえる。

微分方程式 $a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ の解

特性方程式の解が

実数解 $\alpha_1\,(m_1\text{重}), \ldots, \alpha_j\,(m_j\text{重})$
虚数解 $p_1 \pm q_1 i\ (l_1\text{重}), \ldots, p_k \pm q_k i\ (l_k\text{重})$

のとき（$m_1 + \cdots + m_j + 2l_1 + \cdots + 2l_k = n$）

$$\begin{aligned}
y \quad = \quad & \left(C_{1,1} + C_{1,2}x + \cdots + C_{1,m_1} x^{m_1-1}\right) e^{\alpha_1 x} \\
& + \cdots \\
& + \left(C_{j,1} + C_{j,2}x + \cdots + C_{j,m_j} x^{m_j-1}\right) e^{\alpha_j} \\
& + e^{p_1 x}\left(\left(D_{1,1} + D_{1,2}x + \cdots + D_{1,l_1} x^{l_1-1}\right)\sin q_1 x\right. \\
& \qquad \left. + \left(E_{1,1} + E_{1,2}x + \cdots + E_{1,l_1} x^{l_1-1}\right)\cos q_1 x\right) \\
& + \cdots \\
& + e^{p_k x}\left(\left(D_{k,1} + D_{k,2}x + \cdots + D_{k,l_k} x^{l_k-1}\right)\sin q_k x\right. \\
& \qquad \left. + \left(E_{k,1} + E_{k,2}x + \cdots + E_{k,l_k} x^{l_k-1}\right)\cos q_k x\right)
\end{aligned}$$

例 1 $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$

特性方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= t^4 + 2t^3 - 2t - 1 \\ &= (t^4 - 1) + 2(t^3 - t) \\ &= (t^2 + 1)(t^2 - 1) + 2t(t^2 - 1) \\ &= (t^2 + 2t + 1)(t + 1)(t - 1) \\ &= (t + 1)^3 (t - 1) \\ \therefore \quad & t = 1,\ -1\ (3\text{ 重解}) \end{aligned}$$

ゆえに

$$y \quad = C_1 e^x + \left(C_2 + C_3 x + C_4 x^2\right) e^{-x}$$

例 2 $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

特性方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= t^4 + 2t^3 + 3t^3 + 2t + 1 \\ &= (t^2 + t + 1)^2 \\ \therefore \quad & t = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \qquad (\text{それぞれ 2 重解}) \end{aligned}$$

ゆえに

$$y \quad = e^{-\frac{1}{2}x} \left((C_1 + C_2 x) \sin \tfrac{\sqrt{3}}{2} x + (C_3 + C_4 x) \cos \tfrac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

問題

(1) $y''' + 4y'' + 9y' + 10y = 0$

(2) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

(3) $y^{(4)} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$

解答

(1) $y''' + 4y'' + 9y' + 10y = 0$

特性方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= t\ 3 + 4t^2 + 9t + 10 \quad (t = -2 \text{ を代入すると 0 になる}) \\ &= (t+2)(t^2 + 2t + 5) \end{aligned}$$

$$\therefore\ t \quad = -2,\ -1 \pm 2i$$

ゆえに

$$y \quad = C_1 e^{-2x} + e^{-x} \left(C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x \right)$$

(2) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

特性方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= t^4 + 8t^2 + 16 \\ &= \left(t^2 + 4 \right)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore\ t \quad = \pm 2i \qquad (\text{それぞれ 2 重解})$$

ゆえに

$$\begin{aligned} y &= e^{0x} \left((C_1 + C_2 x) \sin 2x + (C_3 + C_4 x) \cos 2x \right) \\ &= (C_1 + C_2 x) \sin 2x + (C_3 + C_4 x) \cos 2x \end{aligned}$$

(3) $y^{(4)} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$

特性方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= t^4 - t^3 - 3t^2 + 5t - 2 \quad (t = 1 \quad \text{を代入すると 0 になる}) \\ &= (t-1)(t^3 - 3t + 2) \qquad (t = 1 \quad \text{を代入すると 0 になる}) \\ &= (t-1)^2 (t^2 + t - 2) \qquad (t = 1 \quad \text{を代入すると 0 になる}) \\ &= (t-1)^3 (t+2) \end{aligned}$$

$$\therefore\ t = -2,\ 1\ (3\ \text{重解})$$

ゆえに

$$y \quad = C_1 x^{-2x} + \left(C_2 + C_3 x + C_4 x^2 \right) e^x$$