20 未定係数法

二階の定数係数線形微分方程式

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$

のうち，$r(x)$ が特別の形をしているものについては，$g(x)$ の形がわかっていることから，積分計算をしないもっと簡単な**未定係数法**という方法で求めることができる。

$r(x)$ の形	特性方程式の解	$g(x)$ の形
$(n$ 次式$)\ e^{\alpha x}$	αを解にもたない	$(n$ 次式$)\ e^{\alpha x}$
	αとα以外の解をもつ	$(n$ 次式$)\ xe^{\alpha x}$
	αを重解としてもつ	$(n$ 次式$)\ x^2e^{\alpha x}$
$e^{px}(k\sin qx + l\cos qx)$	$p \pm qi$ を解にもたない	$e^{px}(K\sin qx + L\cos qx)$
	$p \pm qi$ を解にもつ	$xe^{px}(K\sin qx + L\cos qx)$

例 1 $y'' - 2y' + y = (8 - 6x)e^x$

$r(x) = (8 - 6x)e^x$ は

$(1$ 次式$)e^{1x}$

の形をしている

特性方程式は

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$(t-1)^2 = 0$$
$$\therefore\ t = 1 \quad (\text{重解})$$

1 を重解にもつ

ゆえに，$g(x)$ は

$(1$ 次式$)x^2e^{1x}$

の形をしている

$y = g(x) = (A + Bx)x^2e^x$ とおく

$$\begin{aligned} y &= (Ax^2 + Bx^3)e^x \\ y' &= (2Ax + 3Bx^2)e^x \\ &\quad +(Ax^2 + Bx^3)e^x \\ y'' &= (2A + 6Bx)e^x \\ &\quad +2(2Ax + 3Bx^2)e^x \\ &\quad +(Ax^2 + Bx^3)e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8 - 6x)e^x &= y'' - 2y' + y \\ &= (2A + 6Bx)e^x \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{cases} 2A = 8 \\ 6B = -6 \end{cases}$$
$$\therefore\ A = 4,\ B = -1$$

$$g(x) = (4 - x)x^2e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore\ y &= (C_1 + C_2x)e^x + (4 - x)x^2e^x \\ &= (C_1 + C_2x + 4x^2 - x^3)e^x \end{aligned}$$

例 2 $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}$

$r(x) = e^{2x}$ は

$$(0 \text{ 次式}) e^{2x}$$

の形をしている

特性方程式は

$$t^2 - 2t + 5 = 0$$
$$t = 1 \pm 2i$$

2 を解にもたない

ゆえに

$$g(x) = (0 \text{ 次式}) e^{2x}$$

の形をしている

$y = g(x) = Ae^{2x}$ とおく

$$\begin{aligned} y &= Ae^{2x} \\ y' &= 2Ae^{2x} \\ y'' &= 4Ae^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ e^{2x} &= y'' - 2y' + 5y \\ &= 5Ae^{2x} \end{aligned}$$

$$\therefore\ A = \frac{1}{5}$$

$$g(x) = \frac{1}{5} e^{2x}$$
$$\therefore\ y = e^x \left(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x \right) + \frac{1}{5} e^{2x}$$

例 3 $y'' + y' - 6y = 4 \sin 2x$

$r(x) = 4 \sin 2x$ は

$$e^{0x}(4 \sin 2x + 0 \cos 2x)$$

の形をしている

特性方程式は

$$t^2 + t - 6 = 0$$
$$(t + 3)(t - 2) = 0$$
$$t = -3, 2$$

$0 \pm 2i$ を解にもたない

ゆえに

$$g(x) = e^{0x}(K \sin 2x + L \cos 2x)$$

の形をしている

$y = g(x) = K \sin 2x + L \cos 2x$ とおく

$$\begin{aligned} y &= K \sin 2x + L \cos 2x \\ y' &= 2K \cos 2x - 2L \sin 2x \\ y'' &= -4K \sin 2x - 4L \cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 4 \sin 2x &= y'' + y' - 6y \\ &= (-10K - 2L) \sin 2x \\ &\quad +(2K - 10L) \cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -10K - 2L = 4 \\ 2K - 10L = 0 \end{cases}$$
$$\therefore\ L = -\frac{1}{13}, \qquad K = -\frac{5}{13}$$
$$g(x) = -\frac{5}{13} \sin 2x - \frac{1}{13} \cos 2x$$

$$\begin{aligned} \therefore\ y &= C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} \\ &\quad -\frac{5}{13} \sin 2x - \frac{1}{13} \cos 2x \end{aligned}$$

問題

(1) $y'' + 2y' + y = (x + 2)^2$

(2) $y'' - y' - 2y = 9xe^{-x}$

(3) $y'' + 4y = 5e^x \cos x$

解答

(1) $y'' - 4y' + 4y = (1+2x)^2$

$r(x) = (1+2x)^2$ は

$(2\text{ 次式})e^{0x}$

の形をしている
特性方程式は

$t^2 - 4t + 4 = 0$
$(t-2)^2$
$t = 2$ （重解）
0 を解にもたない

ゆえに

$g(x)$ は $(2\text{ 次式})e^{0x}$

の形をしている

$y = g(x) = A + Bx + Cx^2$ とおく

$$\begin{aligned} y &= A + Bx + Cx^2 \\ y' &= B + 2Cx \\ y'' &= 2C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 1 + 4x + 4x^2 &= y'' - 4y' + 4y \\ &= (4A - 4B + 2C) \\ &\quad +(4B - 8C)x + 4Cx^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4A - 4B + 2C = 1 \\ 4B - 8C = 4 \\ 4C = 4 \end{cases}$$

$$\therefore\ C = 1, \quad B = 3, \quad A = \frac{11}{4}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{11}{4} + 3x + x^2 \\ \therefore\ y &= (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{11}{4} + 3x + x^2 \end{aligned}$$

(2) $y'' - y' - 2y = 9xe^{-x}$

$r(x) = 9xe^{-x}$ は

$(1\text{ 次式})e^{-1x}$

の形をしている
特性方程式は

$t^2 - t - 2 = 0$
$(t+1)(t-2) = 0$
$t = -1, 2$
-1 と -1 以外の解をもつ

ゆえに

$g(x)$ は $(1\text{ 次式})xe^{-x}$

の形をしている

$y = g(x) = (A + Bx)xe^{-x}$ とおく

$$\begin{aligned} y &= (Ax + Bx^2)e^{-x} \\ y' &= (A + 2Bx)e^{-x} \\ &\quad -(Ax + Bx^2)e^{-x} \\ y'' &= 2Be^{-x} \\ &\quad -2(A + 2Bx)e^{-x} \\ &\quad +(Ax + Bx^2)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 9xe^{-x} &= y'' - y' - 2y \\ &= 2Be^{-x} - 3(A + 2Bx)e^{-x} \\ &= (2B - 3A - 6Bx)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2B - 3A = 0 \\ -6B = 9 \end{cases}$$

$$B = -\frac{3}{2}, \qquad A = -1$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(-1 - \frac{3}{2}x\right)xe^{-x} \\ \therefore\ y &= C_1 e^{2x} + \left(C_2 - x - \frac{3}{2}x^2\right)e^{-x} \end{aligned}$$

(3) $y'' + 4y = 5e^x \cos x$

$r(x) = 5e^x \cos x$ は

$$e^{1x}\left(k \sin 1x + l \cos 1x\right)$$

の形をしている
特性方程式は

$$t^2 + 4 = 0$$
$$t = \pm 2i$$

$1 \pm 1i$ を解にもたない

ゆえに

$g(x)$ は $e^{1x}\left(K \sin 1x + L \cos 1x\right)$

の形をしている

$y = g(x) = e^x\left(K \sin x + L \cos x\right)$ とおく

$$\begin{aligned} y &= e^x\left(K \sin x + L \cos x\right) \\ y' &= e^x((K-L)\sin x + (K+L)\cos x) \\ y'' &= e^x(-2L \sin x + 2K \cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 5e^x \cos x &= y'' + 4y \\ &= e^x((4K-2L)\sin x \\ &\quad +(2K+4L)\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4K - 2L = 0 \\ 2K + 4L = 5 \end{cases}$$

$$K = \frac{1}{2}, \quad L = 1$$

$$\begin{aligned} g(x) &= e^x\left(\frac{1}{2}\sin x + \cos x\right) \\ \therefore\ y &= C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x \\ &\quad + e^x\left(\frac{1}{2}\sin x + \cos x\right) \end{aligned}$$