21 オイラー方程式

変数係数の線形微分方程式のうち

$$ax^2y'' + bxy' + cy = r(x) \tag{21.1}$$

の形の方程式をオイラー方程式という。

オイラー方程式は $x = e^t$ とおいて y を t の関数と考えて解くことができる。

y を x で微分したものを y', y'' と書くのに対し，t で微分したものを $\dot{y}, \ddot{y}$ と書くことにする。

$x = e^t$ とおくと

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{e^t} = \dot{y}e^{-t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ddot{y}e^{-t} + \dot{y}(-e^{-t})}{e^t} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}$$

$$\therefore\ ax^2y'' + bxy' + cy = ae^{2t}(\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t} + be^t\dot{y}e^{-t} + cy = a\ddot{y} + (b-a)\dot{y} + cy$$

ゆえに (21.1) は定数係数の線形方程式

$$a\ddot{y} + (b-a)\dot{y} + cy = r(e^t) \tag{21.2}$$

になる。

例 $x^2y'' - 5xy + 9y = \dfrac{1}{x}$

$x = e^t$ とおく

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

$r(t) = e^{-t}$ は

$$(0\text{ 次式})e^{-1t}$$

の形をしている。

特性方程式は

$$u^2 - 6u + 9 = 0$$
$$(u-3)^2 = 0$$
$$\therefore\ u = 3\ (\text{重解})$$

-1 を解にもたない

ゆえに，$g(t)$ は

$$(0\text{ 次式})e^{-1t}$$

の形をしている。

$y = g(t) = Ae^{-1t}$ とおく

$$\begin{aligned} y &= Ae^{-t} \\ \dot{y} &= -Ae^{-t} \\ \ddot{y} &= Ae^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-t} &= 9y - 6\dot{y} + \ddot{y} \\ &= 16Ae^{-t} \end{aligned}$$

$$\therefore\ A = \frac{1}{16}$$

$$g(t) = \frac{1}{16}e^{-t}$$

$$\begin{aligned} y &= (C_1 + C_2t)e^{3t} + \frac{1}{16}e^{-t} \\ &= (C_1 + C_2\log x)x^3 + \frac{1}{16x} \end{aligned}$$

問題

(1) $x^2y'' + 3xy' - 8y = \log x^8$

(2) $x^2y'' - xy' + 5y = x^2$

(3) $x^2y'' + 5xy' - 5y = x \log x^6$

解答

(1) $x^2y'' + 3xy' - 8y = \log x^8$

$x = e^t$ とおく

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 8y = 8t$$

$r(t) = 8t$ は

$$(1\text{ 次式})e^{0t}$$

の形をしている。
特性方程式は

$$\begin{aligned} u^2 + 2u - 8 &= 0 \\ (u-2)(u+4) &= 0 \\ \therefore\ u &= 2, -4 \end{aligned}$$

0 を解にもたない

ゆえに，$g(t)$ は

$$y = g(t) = (1\text{ 次式})e^{0t}$$

の形をしている。

$y = g(t) = At + B$ とおく

$$\begin{aligned} y &= A + Bt \\ \dot{y} &= B \\ \ddot{y} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 8t &= \ddot{y} + 2\dot{y} - 8y \\ &= (-8A + 2B) - 8Bt \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -8A + 2B = 0 \\ -8B = 8 \end{cases}$$

$$\therefore\ B = -1, \quad A = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{2t} + C_2e^{-4t} - \frac{1}{4} - t \\ &= C_1x^2 + \frac{C_2}{x^4} - \frac{1}{4} - \log x \end{aligned}$$

(2) $x^2y'' - xy' + 5y = x^2$

$x = e^t$ とおく

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = e^{2t}$$

$r(t) = e^{2t}$ は

$$(0\text{ 次式})e^{2t}$$

の形をしている。
特性方程式は

$$\begin{aligned} u^2 - 2u + 5 &= 0 \\ u &= 1 \pm 2i \end{aligned}$$

2 を解にもたない

ゆえに，$g(t)$ は

$$(0\text{ 次式})e^{2t}$$

の形をしている。

$y = g(t) = Ae^{2t}$ とおく

$$\begin{aligned} y &= Ae^{2t} \\ \dot{y} &= 2Ae^{2t} \\ \ddot{y} &= 4A^2e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{2t} &= \ddot{y} - 2\dot{y} + 5y \\ &= 5Ae^{2t} \end{aligned}$$

$$\therefore\ A = \frac{1}{5}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} y &= e^t(C_1\sin 2t + C_2\cos 2t) + \frac{1}{5}e^{2t} \\ &= x(C_1\sin\log x^2 + C_2\cos\log x^2) + \frac{1}{5}x^2 \end{aligned}$$

(3) $x^2y'' + 5xy' - 5y = x\log x^6$

$x = e^t$ とおく

$$\ddot{y} + 4\dot{y} - 5y = e^t(6t)$$

$r(t) = 6te^t$ は

$$(1\text{ 次式})e^{1t}$$

の形をしている。
特性方程式は

$$u^2 + 4u - 5 = 0$$
$$(u+5)(u-1) = 0$$
$$\therefore\ u = -5, 1$$

1 を 1 つ解にもつ

ゆえに，$g(t)$ は

$$(1\text{ 次式})te^{1t}$$

の形をしている

$y = g(t) = (A+Bt)te^{1t}$ とおく

$$\begin{aligned} y &= e^t(At + Bt^2) \\ \dot{y} &= e^t(At+Bt^2) + e^t(A+2Bt) \\ \ddot{y} &= e^t(At+Bt^2) + 2e^t(A+2Bt) + e^t(2B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 6te^t &= \ddot{y} + 4\dot{y} - 5y \\ &= 6e^t(A+2Bt) + e^t(2B) \\ &= (6A + 2B + 12Bt)e^t \end{aligned}$$

$$\therefore\ \begin{cases} 6A + 2B = 0 \\ 12B = 6 \end{cases}$$

$$B = \frac{1}{2},\quad A = -\frac{1}{6}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{-5t} + C_2e^t + \left(-\frac{1}{6}t + \frac{1}{2}t^2\right)e^t \\ &= C_1e^{-5t} + \left(C_2 - \frac{1}{6}t + \frac{1}{2}t^2\right)e^t \\ &= \frac{C_1}{x^5} + \left(C_2 - \frac{1}{6}\log x + \frac{1}{2}(\log x)^2\right)x \end{aligned}$$