22　総まとめ

22.1　１階微分方程式

22.1.1　変数分離形

$f(y)y' = g(x)$

$$\int f(y)\,dy - \int g(x)\,dx = C$$

22.1.2　変数分離形に帰着できる形

$y' = f(ax + by + c)$

$u = ax + by + c$　とおくと　$u' = a + bf(u)$　$\cdots$　変数分離形

22.1.3　同次形

$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$u = \dfrac{y}{x}$　とおくと　$u' = \dfrac{f(u) - u}{x}$　$\cdots$　変数分離形

22.1.4　同次形に帰着できる形

$y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$　$(a_1b_2 - a_2b_1 \fallingdotseq\!\!\!\!/\, 0)$

$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$　とおくと　$Y' = \dfrac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$　$\cdots$　同次形

ただし, (α, β) は　$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$　の解

［注］$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ のときは, “(2) 変数分離形に帰着できる形” である。

22.1.5　線形

$y' + P(x)y = Q(x)$

(1)　$F(x) = \int P(x)\ dx$　を計算する。

(2)　$G(x) = e^{F(x)}$　を簡単にする。

(3)　$H(x) = \int Q(x)G(x)\ dx$　を計算する。

(4)　$y = \dfrac{H(x) + C}{G(x)}$　が解である。

22.1.6　線形に帰着できる形（ベルヌーイの方程式）

$y' + P(x)y = Q(x)y^n$

$w = y^{-n+1}$　とおくと　$w' + (-n+1)P(x)w = (-n+1)Q(x)$　$\cdots$　線形

22.1.7　完全微分形

$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$　（$P_y - Q_x = 0$）

(1)　$f(x, y) = \int P(x, y)\ dx + A(y)$ の積分部分を計算する。

(2)　$f(x, y) = \int Q(x, y)\ dy + B(x)$ の積分部分を計算する。

(3)　両者を比べて $A(y), B(x)$ を決定する。

(4)　$f(x, y) = C$ が解である。

22.1.8 完全微分形に帰着できる形（積分因子）

$P(x,y)+Q(x,y)y'=0 \qquad (P_y-Q_x \fallingdotseq 0)$

(1) $\dfrac{P_y-Q_x}{Q}$ が y を含まないとき

$$\begin{aligned} m(x) &= \int \frac{P_y-Q_x}{Q}\,dx \\ M(x) &= e^{m(x)} \qquad \text{が積分因子} \end{aligned}$$

$M(x)$ でわると $\dfrac{P(x,y)}{M(x)}+\dfrac{Q(x,y)}{M(x)}=0 \quad \cdots$ 完全微分形

(2) $\dfrac{P_y-Q_x}{P}$ が x を含まないとき

$$\begin{aligned} n(y) &= -\int \frac{P_y-Q_x}{P}\,dy \\ N(y) &= e^{n(y)} \qquad \text{が積分因子} \end{aligned}$$

$N(y)$ でわると $\dfrac{P(x,y)}{N(y)}+\dfrac{Q(x,y)}{N(y)}=0 \quad \cdots$ 完全微分形

22.1.9 クレーローの方程式

$y=xy'+f(y')$

$t=y'$ とおくと $(x+f'(t))\,t'=0$

(1) $t'=0$ の場合

$y=Cx+f(C) \qquad \cdots$ 一般解

(2) $x=-f'(t)$ の場合

$$\begin{cases} x=-f'(t) \\ y=f(t)-xf'(t) \end{cases} \qquad \cdots \text{特異解}$$

22.2 高階微分方程式

22.2.1 2階定数係数同次線形

$ay'' + by' + c = 0$

特性方程式 $at^2 + bt + c = 0$ の解で場合分け

$t = \alpha, \beta$	(2 実数解)	のとき	$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$
$t = \alpha$	(2 重解)	のとき	$y = (C_1 + C_2 x) e^{\alpha x}$
$t = p \pm qi$	(2 虚数解)	のとき	$y = e^{px} (C_1 \sin qx + C_2 \cos qx)$

22.2.2 2階定数係数非同次線形

$ay'' + by' + cy = r(x)$

特性方程式 $at^2 + bt + c = 0$ の解で場合分け

(1) $t = \alpha, \beta$ (2 実数解) のとき

$$f(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

$$g(x) = \frac{1}{a(\alpha - \beta)} \left(e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} r(x)\, dx - e^{\beta x} \int e^{-\beta x} r(x)\, dx \right)$$

(2) $t = \alpha$ (2 重解) のとき

$$f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\alpha x}$$

$$g(x) = \frac{e^{\alpha x}}{a} \int \left(\int e^{-\alpha x} r(x)\, dx \right) dx$$

(3) $t = p \pm qi$ (2 虚数解) のとき

$$f(x) = e^{px} (C_1 \sin qx + C_2 \cos qx)$$

$$g(x) = \frac{e^{px}}{aq} \left(\sin qx \int e^{-px} \cos qx\ r(x)\, dx - \cos qx \int e^{-px} \sin qx\ r(x)\, dx \right)$$

$$y = \underbrace{f(x)}_{\text{一般解}} + \underbrace{g(x)}_{\text{特殊解}}$$

22.2.3　２階定数係数非同次線形（未定係数法）

$ay'' + by' + c = r(x)$　（$r(x)$ が下記の特別の形）の特殊解

(1)　$r(x) = (n$ 次式$)\ e^{\alpha x}$　の形のとき

$g(x) = x^k(A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)e^{\alpha x}$　とおく

ただし k は特性方程式の解のうちαの個数（0 か 1 か 2）

(2)　$r(x) = e^{px}(k \sin qx + l \cos qx)$　の形のとき

$g(x) = x^k e^{px}(K \sin qx + L \cos qx)$　とおく

ただし k は特性方程式の解のうち $p \pm qi$ の個数（0 か 1）

22.2.4　定数係数線形に帰着できる形（オイラーの方程式）

$ax^2y'' + bxy' + cy = r(x)$

$x = e^t$　とおくと　$a\ddot{y} + (b-a)\dot{y} + cy = r(e^t)$　$\cdots$　定数係数線形

22.3 $\int e^{ax}\sin bx\ dx$ と $\int e^{ax}\cos bx\ dx$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int \underbrace{e^{ax}}_{u'}\underbrace{\sin bx}_{v}\ dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \int \frac{1}{a}e^{ax} b\cos bx\ dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int \underbrace{e^{ax}}_{u'}\underbrace{\cos bx}_{v}\ dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \int \frac{1}{a}e^{ax}(-b\sin bx)\ dx\right) \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\ dx \\
&= \frac{1}{a^2}\left(e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) - b^2F(x)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ (a^2+b^2)F(x) \quad = \quad e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)
$$

$$
\boxed{\int e^{ax}\sin bx\ dx \quad = \quad e^{ax}\frac{(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}}
$$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \int \underbrace{e^{ax}}_{u'}\underbrace{\cos bx}_{v}\ dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \int \frac{1}{a}e^{ax}(-b\sin bx)\ dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int \underbrace{e^{ax}}_{u'}\underbrace{\sin bx}_{v}\ dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \int \frac{1}{a}e^{ax}b\cos bx)\ dx\right) \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\ dx \\
&= \frac{1}{a^2}\left(e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) - b^2G(x)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ (a^2+b^2)G(x) \quad = \quad e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)
$$

$$
\boxed{\int e^{ax}\cos bx\ dx \quad = \quad e^{ax}\frac{(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}}
$$

22.4 総合演習

(1) $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+4}}$

(2) $y' = -\dfrac{x^2-4xy+y^2}{x^2+xy}$

(3) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x-2x^2}{1+x^2}$

(4) $y' = 2y - 2x\sqrt{y}$

(5) $y' = \dfrac{3x^2y+xy^2}{x^3-y}$

(6) $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$

(7) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

(8) $3x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$

(9) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos x}$

解答

(1) $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+4}}$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \quad \cdots \quad \text{変数分離形}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx \\ &= \log|y| - \log\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| \\ &= \log\left|\frac{y}{x+\sqrt{x^2+4}}\right| \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{y}{x+\sqrt{x^2+4}} = C_2$$

$$\therefore y = C\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$$

(2) $y' = -\dfrac{x^2-4xy+y^2}{x^2+xy}$

$$y' = -\frac{1-4\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}} \quad \cdots \quad \text{同次形}$$

$u = \dfrac{y}{x}$ とおく

$$\begin{aligned} u' &= \frac{y' - \frac{y}{x}}{x} \\ &= \frac{-\frac{1-4u+u^2}{1+u} - u}{x} \\ &= \frac{-\frac{1-3u+2u^2}{1+u}}{x} \\ \frac{1}{x} &= -\frac{1+u}{1-3u+2u^2}u' \\ &= \frac{-1-u}{(u-1)(2u-1)}u' \\ &= \left(\frac{-2}{u-1}+\frac{3}{2u-1}\right)u' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \left(\frac{-2}{u-1}+\frac{3}{2u-1}\right)du \\ &= \log|x| + 2\log|u-1| - \frac{3}{2}\log|2u-1| \\ 2C_1 &= 2\log|x| + 4\log|u-1| - 3\log|2u-1| \\ &= \log\left|\frac{(u-1)^4x^2}{(2u-1)^3}\right| \\ &= \log\left|\frac{(u-1)^4x^5}{(2u-1)^3x^3}\right| \\ &= \log\left|\frac{(y-x)^4x}{(2y-x)^3}\right| \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{(y-x)^4x}{(2y-x)^3} = C$$

(3) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x-2x^2}{1+x^2} \quad (x>0)$

$$y' - \frac{1}{x}y' = \frac{x-2x^2}{1+x^2} \quad \cdots \quad \text{線形}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int -\frac{1}{x}\,dx \\ &= -\log x \\ G(x) &= e^{-\log x} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x) &= \int \frac{1}{x}\frac{x-2x^2}{1+x^2}\,dx \\ &= \int \frac{1-2x}{1+x^2}\,dx \\ &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\ &= \tan^{-1} x - \log(1+x^2) \end{aligned}$$

$$y = x\left(\tan^{-1} x - \log(1+x^2) + C\right)$$

(4) $y' = 2y - 2x\sqrt{y}$

$$y' - 2y = -2x\sqrt{y} \quad \cdots \quad \text{ベルヌーイの方程式}$$

$$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' - y^{\frac{1}{2}} = -x$$

$w = y^{\frac{1}{2}}$ とおく

$$w' - w = -x$$

$$F(x) = \int -1\,dx = -x$$

$$\begin{aligned} G(x) &= e^{-x} \\ H(x) &= \int e^{-x}(-x)\,dx \\ &= -e^{-x}(-x) - \int -e^{-x}(-1)\,dx \\ &= xe^{-x} + e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= e^x\left(xe^{-x} + e^{-x} + C\right) = x + 1 + Ce^x \\ y &= \left(x + 1 + Ce^x\right)^2 \end{aligned}$$

(5) $y' = \dfrac{3x^2y + xy^2}{x^3 - y}$

$$\underbrace{3x^2y + xy^2}_{P} + \underbrace{(-x^3 + y)}_{Q}y' = 0$$

$$P_y - Q_x = 3x^2 + 2xy + 3x^2 = 2x(3x + y)$$

$$\frac{P_y - Q_x}{P} = \frac{2x(3x + y)}{xy(3x + y)} = \frac{2}{y}$$ $\cdots$ 完全微分形に帰着できる

$$\begin{aligned} n(y) &= -\int \frac{2}{y}\,dy \\ &= -2\log|y| \\ N(y) &= e^{-2\log|y|} \\ &= \frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{3x^2}{y} + x + \left(-\frac{x^3}{y^2} + \frac{1}{y}\right)y' = 0$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int\left(\frac{3x^2}{y} + x\right)dx + A(y) \\ &= \frac{x^3}{y} + \frac{1}{2}x^2 + A(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int\left(-\frac{x^3}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy + B(x) \\ &= \frac{x^3}{y} + \log|y| + B(x) \end{aligned}$$

$$\therefore\ f(x,y) = \frac{x^3}{y} + \frac{1}{2}x^2 + \log|y|$$

$$\therefore\quad \frac{x^3}{y} + \frac{1}{2}x^2 + \log|y| = C_1$$

$$2x^3 + x^2y + 2y\log|y| - Cy = 0$$

(6) $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$ $\cdots$ **クレーローの方程式**

$t = y'$ とおく

$$y = xt + \sqrt{1 + t^2}$$

$$y' = t + xt' + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}t'$$

$$0 = t'\left(x + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right)$$

(i) $t' = 0$ の場合

$$t = C$$

$$\therefore\quad y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$$ $\cdots\cdots$一般解

(ii) $x = -\dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$ の場合

$$\begin{aligned} y &= -\frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} + \sqrt{1 + t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore\ x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geqq 0)$$ $\cdots\cdots$特異解

(7) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ $\cdots$ **線形，未定係数法**

特性方程式

$$t^2 + 4t + 4 = (t+2)^2$$
$$\therefore\ t = -2 \quad (\text{重解})$$

一般解

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

特殊解

$g(x) = Ax^2 e^{-2x}$ の形をしている

$$\begin{aligned} y &= Ax^2 e^{-2x} \\ y' &= Ax^2(-2e^{-2x}) + 2Axe^{-2x} \\ y'' &= Ax^2(4e^{-2x}) + 2Ax(-2e^{-2x}) \\ &\quad +2Ax(-2e^{-2x}) + 2Ae^{-2x} \\ e^{-2x} &= 0 + 0 + 2Ae^{-2x} \\ \therefore\ A &= \frac{1}{2} \\ g(x) &= \frac{1}{2}x^2 e^{-2x} \end{aligned}$$

$$y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-2x}$$

(8) $3x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ $\cdots$ **オイラー方程式**

$x = e^t$ とおく

$$3\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0$$

特性方程式

$$\begin{aligned} 0 &= 3u^2 - u - 2 \\ &= (u-1)(3u+2) \end{aligned}$$

$$\therefore\ u = 1, -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^t + C_2 e^{-\frac{2}{3}t} \\ &= C_1 x + C_2 x^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

(9) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos x}$ $\cdots$ **非同次線形**

特性方程式

$$t^2 + 4 = 0$$
$$\therefore\ t = \pm 2i$$

一般解

$$f(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

特殊解

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}\left(\sin 2x \int \frac{\cos 2x}{\cos x}\, dx - \cos 2x \int \frac{\sin 2x}{\cos x}\, dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin 2x \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}\, dx - \cos 2x \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x}\, dx\right) \\ &= \sin 2x \int \left(\cos x - \frac{1}{2\cos x}\right) dx - \cos 2x \int \sin x\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x}\, dx &= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\, dx \qquad (t = \sin x \text{ とおく}) \\ &= \int \frac{1}{1 - t^2}\, dt \\ &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{1-t}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\log|1+t| - \log|1-t|\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= -\sin 2x\left(-\sin x + \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right) + \cos 2x \cos x \\ &= \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x - \frac{1}{4}\sin 2x \log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| \\ &= \cos x - \frac{1}{4}\sin 2x \log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| \end{aligned}$$

$$\therefore\ y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \cos x - \frac{1}{4}\sin 2x \log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$$