23　第３回試験

問題

(1) $y'' + 2y' + 10y = 0$

(2) $3y'' + 4y' - 15y = e^{-3x}$

(3) $y'' - 4y' + 4y = 2\sin 2x - \cos 2x$

(4) $2x^2y'' - xy' - 2y = 25x^2 \log x$

(5) $y'' + y = 3\cos^2 x$

(6) $x^3y'' + 3x^2y' - 3xy = 4$

解答

(1) $y'' + 2y' + 10y = 0$ $\cdots$ 同次線形

特性方程式

$$t^2 + 2t + 10 = 0$$
$$(t+1)^2 = -9$$
$$t = -1 \pm 3i$$

一般解

$$y = f(x) = e^{-x}\left(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\right)$$

(2) $3y'' + 4y' - 15y = e^{-3x}$ $\cdots$ 非同次線形

$r(x) = e^{-3x}$

$\cdots$ (0 次式)e^{-3x} の形をしている

特性方程式

$$3t^2 + 4t - 15 = 0$$
$$(3t-5)(t+3) = 0$$
$$t = \frac{5}{3},\ -3$$

$\cdots$ -3 を 1 つ解にもつ

$3y'' + 4y' - 15y = 0$ の一般解

$$f(x) = C_1 e^{\frac{5}{3}} + C_2 e^{-3x}$$

$3y'' + 4y' - 15y = e^{-3x}$ の特殊解 $g(x)$ は
(0 次式)xe^{-3x} の形をしている

$$\begin{array}{rclcl} y & = & Axe^{-3x} & & \\ y' & = & -3Axe^{-3x} & + & Ae^{-3x} \\ y'' & = & 9Axe^{-3x} & - & 3Ae^{-3x} \\ & & & - & 3Ae^{-3x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} e^{-3x} &= 3y'' + 4y' - 15y \\ &= -14Ae^{-3x} \end{aligned}$$

$$\therefore\ A = -\frac{1}{14}$$

$$g(x) = -\frac{1}{14}xe^{-3x}$$

$3y'' + 4y' - 15y = e^{-3x}$ の一般解

$$y = C_1 e^{\frac{5}{3}} + \left(C_2 - \frac{1}{14}x\right)e^{-3x}$$

(3) $y'' - 4y' + 4y = 2\sin 2x - \cos 2x$

$\cdots$ 非同次線形

$r(x) = 2\sin 2x - \cos 2x$

$\cdots \quad e^{0x}(k\sin 2x + l\cos 2x)$ の形

特性方程式

$t^2 - 4t + 4 = 0$
$(t-2)^2 = 0$
$\therefore\ t = 2$ (重解)

$\cdots \quad 0 \pm 2i$ を解にもたない

$y'' - 4y' + 4y = 0$ の一般解

$$f(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$$

$y'' - 4y' + 4y = 2\sin 2x - \cos 2x$ の特殊解 $g(x)$ は $e^{0x}(K\sin 2x + L\cos 2x)$ の形をしている

$$\begin{array}{rcrcr} y & = & K\sin 2x & + & L\cos 2x \\ y' & = & -2L\sin 2x & + & 2K\cos 2x \\ y'' & = & -4K\sin 2x & - & 4L\cos 2x \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2\sin 2x - \cos 2x &= y'' - 4y' + 4y \\ &= 8L\sin 2x - 8K\cos 2x \end{aligned}$$

$$\therefore\ \begin{cases} 8L = 2 \\ -8K = -1 \end{cases}$$

$$K = \frac{1}{8},\ L = \frac{1}{4}$$

$$g(x) = \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$$

$y'' - 4y' + 4y = 2\sin 2x - \cos 2x$ の一般解

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$$

(4) $2x^2y'' - xy' - 2y = 25x^2\log x$

$\cdots$ オイラーの方程式

$x = e^t$ とおく

$$\begin{aligned} 2\ddot{y} - 3\dot{y} - 2y &= 25(e^t)^2\log e^t \\ &= 25e^{2t}t \\ &= 25te^{2t} \end{aligned}$$

$\cdots \quad$ (1 次式)e^{2t} の形

特性方程式

$$2u^2 - 3u - 2 = 0$$

$$(2u+1)(u-2) = 0$$

$$\therefore\ u = -\frac{1}{2},\ u = 2$$

$\cdots \quad 2$ を 1 つ解にもつ

$2\ddot{y} - 3\dot{y} - 2y = 0$ の一般解

$$f(t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} + C_2 e^{2t}$$

$2\ddot{y} - 3\dot{y} - 2y = 25te^{2t}$ の特殊解

$g(t) =$ (1 次式)te^{2t} の形をしている

$$\begin{aligned} y &= e^{2t}(At + Bt^2) \\ \dot{y} &= 2e^{2t}(At + Bt^2) + e^{2t}(A + 2Bt) \\ \ddot{y} &= 4e^{2t}(At + Bt^2) + 2e^{2t}(A + 2Bt) \\ &\quad + 2e^{2t}(A + 2Bt) + e^{2t}(2B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (25t)e^{2t} &= 2\ddot{y} - 3\dot{y} - 2y \\ &= 5e^{2t}(A + 2Bt) + 2e^{2t}(2B) \\ &= (5A + 4B + 10Bt)e^{2t} \end{aligned}$$

$$\therefore\ \begin{cases} 10B = 25 \\ 5A + 4B = 0 \end{cases}$$

$$B = \frac{5}{2},\ A = -2$$

$$g(t) = \left(-2t + \frac{5}{2}t^2\right)e^{2t}$$

$2\ddot{y} - 3\dot{y} - 2y = 25te^{2t}$ の一般解

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} + \left(C_2 - 2t + \frac{5}{2}t^2\right)e^{2t}$$

(5) $y'' + y = 3\cos^2 x$ $\cdots$ 非同次線形

特性方程式

$$t^2 + 1 = 0; \quad \therefore\ t = \pm i$$

$y'' + y = 0$ の一般解

$$f(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

特殊解

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin x \int \cos x \cdot 3\cos^2 x\,dx \\ &\quad - \cos x \int \sin x \cdot 3\cos^2 x\,dx \\ &= \sin x \int 3\cos^3 x\,dx \\ &\quad - \cos x \int 3\cos^2 x \sin x\,dx \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} &\int 3\cos^3 x\,dx \quad \Big(t = \sin x \text{ とおく}\Big) \\ &= \int 3(1 - \sin^2 x)\cos x\,dx \\ &= \int (3 - 3t^2)\,dt \\ &= 3t - t^3 \\ &= 3\sin x - \sin^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int 3\cos^2 x \sin x\,dx \quad \Big(t = \cos x \text{ とおく}\Big) \\ &= \int 3t^2\,(-1)dt \\ &= -t^3 \\ &= -\cos^3 x \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} g(x) &= 3\sin^2 x - \sin^4 x + \cos^4 x \\ &= 3\sin^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &\qquad \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 3\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\sin^2 x + \cos^2 x \\ &= \sin^2 x + 1 \end{aligned}$$

したがって

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin^2 x + 1$$

(6) $x^3 y'' + 3x^2 y' - 3xy = 4$

x でわる

$$x^2 y'' + 3xy' - 3y = \frac{4}{x}$$

$\cdots$ オイラーの方程式

$x = e^t$ とおく

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 4e^{-t}$$

$r(t) = 4e^{-t}$ は (0 次式)e^{-1t} の形
特性方程式

$$\begin{aligned} &u^2 + 2u - 3 = 0 \\ &(u-1)(u+3) = 0 \\ &\therefore\ u = 1,\ -3 \end{aligned}$$

$\cdots$ -1 を解にもたない

$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 0$ の一般解

$$f(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$$

$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 4e^{-t}$ の特殊解

$$\begin{aligned} y &= Ae^{-t} \\ \dot{y} &= -Ae^{-t} \\ \ddot{y} &= Ae^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4e^{-t} &= \ddot{y} + 2\dot{y} - 3y \\ &= -4Ae^{-t} \\ \therefore\ A &= -1 \end{aligned}$$

$$g(t) = -e^{-t}$$

$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 4e^{-t}$ の一般解

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} - e^{-t}$$

$x^3 y'' + 3x^2 y' - 3xy = 4$ の一般解

$$\begin{aligned} y &= C_1 x + C_2 x^{-3} - x^{-1} \\ &= C_1 x + \frac{C_2}{x^3} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$