

1 数の計算

1.1 素数

定義 1.1 1 より大きい自然数は、次の 2 種類に分類される。

- (1) 合成数：自分より小さい 2 つの数の積で表される。
例： $4(= 2 \times 2)$, $6(= 2 \times 3)$, $8(= 2 \times 4)$, $9(= 3 \times 3)$, ...
- (2) 素数：自分より小さい 2 つの数の積で表されない。
例：2, 3, 5, 7, ...

例 1.1 次の表で合成数を で消しなさい (素数を残す)。

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

解答

2 より大きい 2 の倍数を消す。

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

3 より大きい 3 の倍数を消す。

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

5 より大きい 5 の倍数を消す。

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

終わり。

問題 1.1 次の表で合成数を で消しなさい (素数を残す)。

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.2 素因数分解

定義 1.2 与えられた数を, 素数だけの積の形で表すことを素因数分解という。

例 1.2 次の数を素因数分解しなさい。

(1) 999999

(2) 123321

解答 (1)

$$\begin{array}{r} 3 \) \ 999999 \\ \underline{3 \) \ 333333} \\ 3 \) \ 111111 \\ \underline{7 \) \ 37037} \\ 11 \) \ 5291 \\ \underline{13 \) \ 481} \\ 37 \end{array}$$

$$999999 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$$

(2)

$$\begin{array}{r} 3 \) \ 123321 \\ \underline{11 \) \ 41107} \\ 37 \) \ 3737 \\ \underline{ 101} \end{array}$$

$$123321 = 3 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 101$$

問題 1.2 次の数を素因数分解しなさい。

(1) 8316

(2) 12321

1.3 最大公約数, 最小公倍数

定義 1.3 2つの数 m, n について,

(1) 共通の約数のうちで最も大きいものを最大公約数 (gcd) という。

(2) 共通の倍数のうちで最も小さいものを最小公倍数 (lcm) という。

例 1.3 168 と 196 の最大公約数 gcd と最小公倍数 lcm を求めよ。

解答

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$

$$196 = 2^2 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 7^2$$

$$gcd = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 7^1 = 28 \quad (\text{各素数について個数の少ない方にする})$$

$$lcm = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^2 = 1176 \quad (\text{各素数について個数の多い方にする})$$

問題 1.3 次の2つの数の最大公約数 gcd と最小公倍数 lcm を求めよ。

(1) 60 と 99

(2) 825 と 540

1.4 分数

例 1.4 次の計算をなさい。結果は既約分数（約分しきった形）にすること。

$$(1) \frac{5}{28} + \frac{7}{12}$$

$$(2) \frac{5}{28} - \frac{7}{12}$$

$$(3) \frac{5}{28} \times \frac{7}{12}$$

$$(4) \frac{5}{28} \div \frac{7}{12}$$

解答

$$\begin{aligned} (1) \frac{5}{28} + \frac{7}{12} &= \frac{5}{4 \times 7} + \frac{7}{4 \times 3} = \frac{5 \times 3}{4 \times 7 \times 3} + \frac{7 \times 7}{4 \times 3 \times 7} = \frac{15 + 49}{4 \times 3 \times 7} = \frac{64}{4 \times 3 \times 7} \\ &= \frac{4 \times 16}{4 \times 3 \times 7} = \frac{16}{3 \times 7} = \frac{16}{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{5}{28} - \frac{7}{12} &= \frac{5}{4 \times 7} - \frac{7}{4 \times 3} = \frac{5 \times 3}{4 \times 7 \times 3} - \frac{7 \times 7}{4 \times 3 \times 7} = \frac{15 - 49}{4 \times 3 \times 7} = \frac{-34}{4 \times 3 \times 7} \\ &= -\frac{2 \times 17}{4 \times 3 \times 7} = -\frac{17}{2 \times 3 \times 7} = -\frac{17}{42} \end{aligned}$$

$$(3) \frac{5}{28} \times \frac{7}{12} = \frac{5}{4 \times 7} \times \frac{7}{4 \times 3} = \frac{5 \times 7}{16 \times 3 \times 7} = \frac{5}{16 \times 3} = \frac{5}{48}$$

$$(4) \frac{5}{28} \div \frac{7}{12} = \frac{5}{4 \times 7} \times \frac{4 \times 3}{7} = \frac{5 \times 4 \times 3}{4 \times 7 \times 7} = \frac{5 \times 3}{7 \times 7} = \frac{15}{49}$$

問題 1.4 次の計算をなさい。結果は既約分数にすること。

$$(1) \frac{17}{60} + \frac{46}{105}$$

$$(2) \frac{17}{60} - \frac{46}{105}$$

$$(3) \frac{17}{60} \times \frac{46}{105}$$

$$(4) \frac{17}{60} \div \frac{46}{105}$$

1.5 根号を含む数

例 1.5 次の計算をなさい。

(1) $\sqrt{49-25}$

(2) $\sqrt{48}-\sqrt{12}$

(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$

(4) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

解答

(1) $\sqrt{49-25}=\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=2\sqrt{6}$

(誤答) $\sqrt{49-25}=\sqrt{49}-\sqrt{25}=7-5=2$

(2) $\sqrt{48}-\sqrt{12}=\sqrt{16\cdot 3}-\sqrt{4\cdot 3}=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(誤答) $\sqrt{48}-\sqrt{12}=\sqrt{48-12}=\sqrt{36}=6$

(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{6})^2-2\sqrt{6}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=6-2\sqrt{12}+2=8-2\sqrt{4\cdot 3}$
 $=8-4\sqrt{3}$

(誤答) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2=6-2=4$

(4) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{2(\sqrt{5})^2+3\sqrt{5}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$
 $=\frac{10+3\sqrt{10}+2}{5-2}=\frac{12+3\sqrt{10}}{3}=\frac{3(4+\sqrt{10})}{3}=4+\sqrt{10}$

問題 1.5 次の計算をなさい。

(1) $\sqrt{9+16+25}$

(2) $\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{50}$

(3) $(\sqrt{10}+\sqrt{5})^2$

(4) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2}$

1.6 負の数と絶対値

例 1.6 次の計算をなさい。

$$(1) (1 - 2 - 3) \times (4 - 5 - 6) \times (7 - 8 - 9)$$

$$(2) (1 - 2) \times (3 - 4 - 5) \times (6 - 7) \times (8 - 9)$$

$$(3) |1 - \sqrt{3}| - |2 - \sqrt{3}| + |3 - \sqrt{3}|$$

$$(4) |1 - \sqrt{5}| - |2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}|$$

ヒント

負の数を奇数個かけると負の数になる。

負の数を偶数個かけると正の数になる。

ヒント

$$|x - y| = (x, y \text{ の大きい方}) - (x, y \text{ の小さい方})$$

$$x \geq y \text{ のとき } |x - y| = x - y$$

$$x \leq y \text{ のとき } |x - y| = y - x = -(x - y)$$

解答

$$(1) (1 - 2 - 3) \times (4 - 5 - 6) \times (7 - 8 - 9) = (-4) \times (-7) \times (-10) = -280$$

$$(2) (1 - 2) \times (3 - 4 - 5) \times (6 - 7) \times (8 - 9) = (-1) \times (-6) \times (-1) \times (-1) = 6$$

$$(3) 1 < \sqrt{3} < 2 \text{ だから}$$

$$\begin{aligned} |1 - \sqrt{3}| - |2 - \sqrt{3}| + |3 - \sqrt{3}| &= (\sqrt{3} - 1) - (2 - \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3}) \\ &= \sqrt{3} - 1 - 2 + \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$(4) 2 < \sqrt{5} < 3 \text{ だから}$$

$$\begin{aligned} |1 - \sqrt{5}| - |2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| &= (\sqrt{5} - 1) - (\sqrt{5} - 2) + (3 - \sqrt{5}) \\ &= \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} + 2 + 3 - \sqrt{5} = 4 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

問題 1.6 次の計算をなさい。

$$(1) (1 - 9) \times (2 - 7) \times (3 - 5) \times (4 - 3)$$

$$(2) (9 - 10) \times (8 - 12) \times (7 - 14) \times (6 - 16)$$

$$(3) |\sqrt{7} - 2| + |\sqrt{7} - 3| - |\sqrt{7} - 4|$$

$$(4) |\pi - 2| + |\pi - 3| - |\pi - 4|$$

1.7 複素数

例 1.7 次の計算をなさい。

$$(1) (3 + 4i) + (1 - 2i)$$

$$(2) (3 + 4i) - (1 - 2i)$$

$$(3) (3 + 4i)(1 - 2i)$$

$$(4) \frac{3 + 4i}{1 - 2i}$$

ヒント $i^2 = -1$

解答

$$(1) (3 + 4i) + (1 - 2i) = (3 + 1) + (4 - 2)i = 4 + 2i$$

$$(2) (3 + 4i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + (4 - (-2))i = 2 + 6i$$

$$(3) (3 + 4i)(1 - 2i) = 3 + 4i - 6i - 8i^2 = 3 - 2i - 8(-1) = 11 - 2i$$

$$(4) \frac{3 + 4i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{3 + 4i + 6i + 8i^2}{1 - 4i^2} = \frac{3 + 10i + 8(-1)}{5} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$$

問題 1.7 次の計算をなさい。

$$(1) (2 + 4i) + (3 + i)$$

$$(2) (2 + 4i) - (3 + i)$$

$$(3) (2 + 4i)(3 + i)$$

$$(4) \frac{2 + 4i}{3 + i}$$

解答

問題 1.1

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

問題 1.2

(1) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$

(2) $3^2 \cdot 37^2$

問題 1.3

(1) $gcd = 3$
 $lcm = 1980$

(2) $gcd = 15$
 $lcm = 29700$

問題 1.4

(1) $\frac{101}{140}$

(2) $-\frac{13}{84}$

(3) $\frac{391}{3150}$

(4) $\frac{119}{184}$

問題 1.5

(1) $5\sqrt{2}$

(2) $12\sqrt{2}$

(3) $15 + 10\sqrt{2}$

(4) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

問題 1.6

(1) -80

(2) 280

(3) $-3 + \sqrt{7}$

(4) $3\pi - 9$

問題 1.7

(1) $5 + 5i$

(2) $-1 + 3i$

(3) $2 + 14i$

(4) $1 + i$