

2 式の計算

2.1 整式の加減乗除

例 2.1 次の整式 A, B について, $A + B$ (和), $A - B$ (差), $A \times B$ (積), $A \div B$ (商と余り) を計算しなさい。

$$A = 2x^3 - 5x + 7, \quad B = x^2 + 2x - 3$$

解答 係数だけ書くようにすると早くできる。

$$\begin{array}{rcccc}
 x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 2 & 0 & -5 & 7 \leftarrow A \\
 + & & 1 & 2 \leftarrow B \\
 \hline
 2 & 1 & -3 & 4 \leftarrow A+B
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc}
 x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & 2 & 0 & -5 & 7 \leftarrow A \\
 \times & & & 1 & 2 & -3 \leftarrow B \\
 \hline
 & & -6 & 0 & 15 & -21 \\
 & 4 & 0 & -10 & 14 & \\
 & 2 & 0 & -5 & 7 & \\
 \hline
 2 & 4 & -11 & -3 & 29 & -21 \leftarrow A \times B
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc}
 x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 2 & 0 & -5 & 7 \leftarrow A \\
 - & & 1 & 2 \leftarrow B \\
 \hline
 2 & -1 & -7 & 10 \leftarrow A-B
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc}
 x^2 & x^1 & x^0 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & 2 & -4 \leftarrow \text{商} \\
 B \rightarrow & 1 & 2 & -3 \left. \vphantom{B} \right) & 2 & 0 & -5 & 7 \leftarrow A \\
 & & & & 2 & 4 & -6 & \\
 & & & & & -4 & 1 & 7 \\
 & & & & & -4 & -8 & 12 \\
 & & & & & & 9 & -5 \leftarrow \text{余り}
 \end{array}$$

$$A + B = 2x^3 + x^2 - 3x + 4$$

$$A - B = 2x^3 - x^2 - 7x + 10$$

$$A \times B = 2x^5 + 4x^4 - 11x^3 - 3x^2 + 29x - 21$$

$$A \div B = 2x - 4 \quad \text{余り } 9x - 5$$

問題 2.1 次の整式 A, B について, $A + B$ (和), $A - B$ (差), $A \times B$ (積), $A \div B$ (商と余り) を計算しなさい。

$$(1) \quad A = 3x^2 + x - 5, \quad B = x^2 + x - 2$$

$$(2) \quad A = 4x^3 - 6x^2 - 8, \quad B = 2x^2 - x + 1$$

2.3 部分分数に分解

真分数式の分母が異なる1次式の積に因数分解できるとき、それらの1次式を分母とする真分数式の和に分解できます。これを部分分数に分解するといいます。

例 2.3 次の分数式を部分分数に分解しなさい。

$$\frac{2x^2 - 12x + 22}{(x+1)(x-2)(x-3)}$$

解答

$$\frac{2x^2 - 12x + 22}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{の形に分解できる}$$

①の両辺に $(x+1)(x-2)(x-3)$ (分母) をかける。

$$2x^2 - 12x + 22 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2) \quad \dots \textcircled{2}$$

②の x に $-1, 2, 3$ (①の分母を0にするような数) を代入する。

$$\begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow 36 = 12A + 0B + 0C = 12A && \therefore A = 3 \\ x = 2 &\Rightarrow 6 = 0A - 3B + 0C = -3B && \therefore B = -2 \\ x = 3 &\Rightarrow 4 = 0A + 0B + 4C = 4C && \therefore C = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{2x^2 - 12x + 22}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

問題 2.3 次の分数式を部分分数に分解しなさい。

$$(1) \frac{x+7}{(x-2)(x-5)}$$

$$(2) \frac{7x}{(x+2)(2x-3)}$$

$$(3) \frac{2x^2 - 9x - 5}{(x+3)(x-1)(x-2)}$$

$$(4) \frac{3x^2 + x + 4}{(x+4)x(x-2)}$$

2.4 部分分数分解 (2)

分母が $(x-a)^2(x-b)$ の形をしている真分数式は $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$ の形に部分分数分解できます。

例 2.4 次の分数式を部分分数に分解しなさい。

$$\frac{5x^2 - 11x - 3}{(x-2)^2(x+3)}$$

解答

$$\frac{5x^2 - 11x - 3}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+3} \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{の形に分解できる}$$

①の両辺に $(x-2)^2(x+3)$ をかける。

$$5x^2 - 11x - 3 = A(x-2)(x+3) + B(x+3) + C(x-2)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

②の x に $2, -3$ (①の分母を 0 にするような数) と 1 (何でも良い, 計算が楽そうな数) を代入する。

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad -5 = 0A + 5B + 0C = 5B \quad \therefore B = -1$$

$$x = -3 \quad \Rightarrow \quad 75 = 0A + 0B + 25C = 25C \quad \therefore C = 3$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad -9 = -4A + 4B + C = -4A - 1 \quad \therefore A = 2$$

$$\frac{5x^2 - 11x - 3}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{3}{x+3}$$

問題 2.4 次の分数式を部分分数に分解しなさい。

$$(1) \quad \frac{7x^2 + 10x - 1}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$(2) \quad \frac{x^2 - 14x + 18}{(x+2)(x-3)^2}$$

2.5 解答

問題 2.1

- (1) $A + B = 4x^2 + 2x - 7$
 $A - B = 2x^2 - 3$
 $A \times B = 3x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 7x + 10$
 $A \div B = 3 \text{ 余 } \text{ㄩ} - 2x + 1$
- (2) $A + B = 4x^3 - 4x^2 - x - 7$
 $A - B = 4x^3 - 8x^2 + x - 9$
 $A \times B = 8x^5 - 16x^4 + 10x^3 - 22x^2 + 8x - 8$
 $A \div B = 2x - 2 \text{ 余 } \text{ㄩ} - 4x - 6$

問題 2.2

- (1) $3x + 1 + \frac{x - 5}{x^2 - x + 3} = \frac{3x^3 - 2x^2 + 9x - 2}{x^2 - x + 3}$
- (2) $2x + 5 - \frac{2x + 1}{x^2 + 3x - 1} = \frac{2x^3 + 11x^2 + 11x - 6}{x^2 + 3x - 1}$
- (3) $\frac{4x^2 - 6x + 1}{2x + 1} = 2x - 4 + \frac{5}{2x + 1}$
- (4) $\frac{x^4 - 2x^2 + 5}{x^2 + x + 3} = x^2 - x - 4 + \frac{7x + 17}{x^2 + x + 3}$

問題 2.3

- (1) $\frac{x + 7}{(x - 2)(x - 5)} = -\frac{3}{x - 2} + \frac{4}{x - 5}$
- (2) $\frac{7x}{(x + 2)(2x - 3)} = \frac{2}{x + 2} + \frac{3}{2x - 3}$
- (3) $\frac{2x^2 - 9x - 5}{(x + 3)(x - 1)(x - 2)} = \frac{2}{x + 3} + \frac{3}{x - 1} - \frac{3}{x - 2}$
- (4) $\frac{3x^2 + x + 4}{(x + 4)x(x - 2)} = \frac{2}{x + 4} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{2(x - 2)}$

問題 2.4

- (1) $\frac{7x^2 + 10x - 1}{(x + 1)^2(x - 1)} = \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2} + \frac{4}{x - 1}$
- (2) $\frac{x^2 - 14x + 18}{(x + 2)(x - 3)^2} = \frac{2}{x + 2} - \frac{1}{x - 3} - \frac{3}{(x - 3)^2}$