3 因数分解

3.1 2 次式の因数分解

3.1.1 式の掛け算の穴埋め

問題 3.1 次の掛け算が成り立つように，$\square$ を埋めなさい。

(1)

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 3 \\ \times & 3 & -1 \\ \hline & \square & \square \\ \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square \end{array} \qquad \therefore\ (2x+3)(3x-1) = \square x^2 + \square x + \square$$

(2)

$$\begin{array}{ccc} & \square & \square \\ \times & \square & \square \\ \hline & \square & \square \\ \square & \square & \\ \hline 1 & 5 & -6 \end{array} \qquad \therefore\ x^2 + 5x - 6 = \left(\square x + \square\right)\left(\square x + \square\right)$$

(3)

$$\begin{array}{ccc} & \square & \square \\ \times & \square & \square \\ \hline & \square & \square \\ \square & \square & \\ \hline 2 & -1 & -6 \end{array} \qquad \therefore\ 2x^2 - x - 6 = \left(\square x + \square\right)\left(\square x + \square\right)$$

(4)

$$\begin{array}{ccc} & \square & \square \\ \times & \square & \square \\ \hline & \square & \square \\ \square & \square & \\ \hline 6 & 5 & -6 \end{array} \qquad \therefore\ 6x^2 + 5x - 6 = \left(\square x + \square\right)\left(\square x + \square\right)$$

(5)

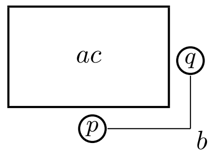
$$\begin{array}{ccc} & \square & \square \\ \times & \square & \square \\ \hline & \square & \square \\ \square & \square & \\ \hline 4 & -13 & 10 \end{array} \qquad \therefore\ 4x^2 - 13x + 10 = \left(\square x + \square\right)\left(\square x + \square\right)$$

3.1.2　矩形法

2 次式の因数分解は，**襷**(たすき)**がけ** と呼ばれる方法が有名ですが，**矩形法**(くけいほう)のほうが簡単にできます。

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= \frac{(ax+p)(ax+q)}{a} \\
&= \text{約分して } a \text{ を消す}
\end{aligned}
$$

ただし $\begin{cases} pq = ac \\ p+q = b \end{cases}$ （右図）



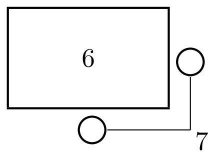
例 3.1 因数分解しなさい。

(1)　$3x^2+7x+2$　　(2)　$6x^2-7x-3$

解答

(1)

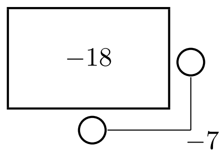
$$
\begin{aligned}
3x^2+7x+2 &= \frac{(3x+6)(3x+1)}{3} \\
&= \frac{3(x+2)(3x+1)}{3} \\
&= (x+2)(3x+1)
\end{aligned}
$$



◯ $= 6, 1$

(2)

$$
\begin{aligned}
6x^2-7x-3 &= \frac{(6x-9)(6x+2)}{6} \\
&= \frac{3(2x-3)2(3x+1)}{6} \\
&= (2x-3)(3x+1)
\end{aligned}
$$



◯ $= -9, 2$

問題 3.2 因数分解しなさい。

(1)　$x^2+11x+30$　　(2)　$3x^2+11x+10$

(3)　$10x^2-9x+2$　　(4)　$6x^2-7x-5$

3.2 高次式の因数分解

3.2.1 $f(p)$ の楽な計算方法

3 次式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ の x に具体的な値 p を代入したときの値 $f(p)$ は，変形した $f(x)=((a\times x+b)\times x+c)\times x+d$ に代入して計算すると楽です。

例 3.2 $f(x)=3x^3+8x^2+x-2$ について，$f(-2)$ と $f\left(\frac{1}{3}\right)$ を計算しなさい。

解答

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (3x^2+8x+1)x-2 \\
&= ((3x+8)x+1)x-2 \\
&= 3\times x+8\times x+1\times x-2 \quad (\text{左から順に計算する})
\end{aligned}
$$

(1) $x=-2$

係数	3	8	1	-2	
左下 $\times x$		-6	-4	6	
	$\downarrow\nearrow$	$\downarrow\nearrow$	$\downarrow\nearrow$	$\downarrow$	
上 2 つの和	3	2	-3	4	$=f(-2)$

(2) $x=\frac{1}{3}$

係数	3	8	1	-2	
左下 $\times x$		1	3	$\frac{4}{3}$	
上 2 つの和	3	9	4	$-\frac{2}{3}$	$=f\left(\frac{1}{3}\right)$

問題 3.3 上の $f(x)$ について，$f\left(-\frac{2}{3}\right)$ を計算しなさい。

3.2.2 3 次式の因数分解

3 次式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を因数分解する手順を $f(x) = 3x^3 + 8x^2 + x - 2$ の例で説明します。

ステップ 1

$f(p) = 0$ となる p を 3.2.1 の計算方法を使って見つける。p は，d の約数を a の約数で割った分数だけ考えればよい。すなわち，

$$p = \pm\frac{n}{m} \quad \left(\begin{array}{l} n \text{ は } d \text{ の約数} \\ m \text{ は } a \text{ の約数（} m = 1 \text{ のとき, } p = n \text{ である）} \end{array} \right)$$

$p =$

$\pm 1, \pm 2, \pm\dfrac{1}{3}, \pm\dfrac{2}{3}$ の中から $f(p) = 0$ になるものを見つける。

係数	3	8	1	-2		
$x = 1$		3	11	12		
和	3	11	12	10	×	最後に 0 にならなかったら×

係数	3	8	1	-2	
$x = -1$		-3	-5	4	
和	3	5	-4	2	×

係数	3	8	1	-2	
$x = 2$		6	28	58	
和	3	14	29	56	×

係数	3	8	1	-2	
$x = -2$		-6	-4	6	
和	3	2	-3	4	×

係数	3	8	1	-2		
$x = \frac{1}{3}$		1	3	$\frac{4}{3}$		
和	3	9	4		×	途中で分数になったら×

係数	3	8	1	-2	
$x = -\frac{1}{3}$		-1	$-\frac{7}{3}$		
和	3	7			×

係数	3	8	1	-2	
$x = \frac{2}{3}$		2	$\frac{4}{3}$		
和	3	10			×

係数	3	8	1	-2		
$x = -\frac{2}{3}$		-2	-4	2		
和	3	6	-3	0	○	最後に 0 になったら○
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$			
	a'	b'	c'			

ステップ 2

$f(x)$ は，ステップ 1 で見つけた p と，その和の行に現れた数 a', b', c' を用いて，

$$f(x) = (x-p)(a'x^2 + b'x + c')$$

と因数分解できる。

$$f(x) \quad = \quad 3x^3 + 8x^2 + x - 2 \quad = \quad \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6x - 3)$$

ステップ 3

p が分数 $\dfrac{n}{m}$ のとき，

$$f(x) = (mx-n)(a''x^2 + b''x + c'')$$

の形に書き換える。

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6x - 3) \quad = \quad \left(x + \frac{2}{3}\right)3(x^2 + 2x - 1) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \quad (3x+2)(x^2+2x-1) \end{aligned}$$

ステップ 4

2 次式 $a''x^2 + b''x + c''$ が因数分解できたらする。

$x^2 + 2x - 1$ について

$D = 4 - 4 \cdot 1(-1) = 8$
因数分解できない

ゆえに

$$f(x) = (3x+2)(x^2+2x-1)$$

問題 3.4 因数分解しなさい。

(1) $x^3 - 3x^2 - 7x - 15$
(2) $60x^3 - 37x^2 - 10x + 3$

3.3 因数分解の応用

問題 3.5 次の分数式を部分分数に分解しなさい。

(1) $\dfrac{4x^2 + 27x + 17}{x^3 + 4x^2 - 17x - 60}$

(2) $\dfrac{2x^2 + 41x + 29}{12x^3 + 16x^2 - 5x - 3}$

3.4 解答

問題 3.1

(1) $(2x+3)(3x-1)=6x^2+7x-3$

(2) $x^2+5x-6=(1x+6)(1x-1)$

(3) $2x^2-x-6=(2x+3)(x-2)$

(4) $6x^2+5x-6=(3x-2)(2x+3)$

(5) $4x^2-13x+10=(4x-5)(x-2)$

問題 3.2

(1) $x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$

(2) $3x^2+11x+10=\dfrac{(3x+5)(3x+6)}{3}=(3x+5)(x+2)$

(3) $10x^2-9x+2=\dfrac{(10x-4)(10x-5)}{10}=(5x-2)(2x-1)$

(3) $6x^2-7x-5=\dfrac{(6x-10)(6x+3)}{6}=(3x-5)(2x+1)$

問題 3.3

係数	3	8	1	-2	
$x=-\frac{2}{3}$		-2	$-\frac{14}{3}$	$\frac{22}{9}$	
和	3	7	$-\frac{11}{3}$	$\frac{4}{9}$	$=f\left(-\frac{2}{3}\right)$

問題 3.4

$$\begin{aligned}
&(1)\quad x^3-3x^2-7x-15 &&= (x-5)(x^2+2x+3)\\
&(2)\quad 60x^3-37x^2-10x+3 &&= (3x+1)(4x-3)(5x-1)
\end{aligned}$$

問題 3.5

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \frac{4x^2+27x+17}{x^3+4x^2-17x-60} &&= \frac{2}{x+3}-\frac{1}{x+5}+\frac{3}{x-4}\\
&(2)\quad \frac{2x^2+41x+29}{12x^3+16x^2-5x-3} &&= \frac{5}{2x-1}-\frac{2}{2x+3}-\frac{4}{3x+1}
\end{aligned}$$