4 方程式と不等式

4.1 例題

(1) $2x+5=5x-3$

$$2x+5=5x-3$$
$$2x-5x=-3-5$$
$$-3x=-8$$
$$x=\frac{8}{3}$$

(2) $2x+5>5x-3$

$$2x+5>5x-3$$
$$2x-5x>-3-5$$
$$-3x>-8$$
$$x<\frac{8}{3}$$

負の数で割ると不等号の向きが逆転する

(3) $x^2-x-6=0$

$$x^2-x-6=0$$
$$(x+2)(x-3)=0$$
$$\therefore\ x=-2,\ 3$$

(4) $x^2-x-6\leqq 0$

$$x^2-x-6\leqq 0$$
$$(x+2)(x-3)\leqq 0$$
$$\therefore\ -2\leqq x\leqq 3$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$
〃 $\leqq 0$	×	○	○	○	×

(5) $x^2-4x+9=0$

$$x^2-4x+9=0$$
$$(x-2)^2-4+9=0$$
$$(x-2)^2+5=0$$
$$(x-2)^2=-5$$
$$x-2=\pm\sqrt{5}\,i$$
$$\therefore\ x=2\pm\sqrt{5}\,i$$

(6) $x^2-4x+9>0$

$$x^2-4x+9>0$$
$$(x-2)^2-4+9>0$$
$$(x-2)^2+5>0$$

$\therefore$ x はすべての実数

(7) $\dfrac{3}{x}=\dfrac{-1}{x-4}$

$$\frac{3}{x}=\frac{-1}{x-4}$$
$$3(x-4)=-x$$
$$3x-12=-x$$
$$4x=12$$
$$\therefore\ x=3$$

(8) $\dfrac{3}{x}\geqq\dfrac{-1}{x-4}$

$$\frac{3}{x}\geqq\frac{-1}{x-4}$$
$$\frac{3(x-4)}{x(x-4)}\geqq\frac{-x}{x(x-4)}$$
$$\frac{3x-12+x}{x(x-4)}\geqq 0$$
$$\frac{4x-12}{x(x-4)}\geqq 0$$
$$\frac{4(x-3)}{x(x-4)}\geqq 0$$

$$\therefore\ 0<x\leqq 3\ ,\ 4<x$$

正か負かわからないので
$x(x-4)$ **をかけてはいけない**

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{4(x-3)}{x(x-4)}$	$-$	×	$+$	0	$-$	×	$+$
〃 $\geqq 0$	×	×	○	○	×	×	○

(9) $\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=10 \ \cdots ① \\ x-y=2 \ \cdots ② \end{cases}$

②より

$y=x-2 \ \cdots ③$

①に代入

$(x-1)^2+(x-3)^2=10$

$(x^2-2x+1)+(x^2-6x+9)-10=0$

$2x^2-8x=0$

$2x(x-4)=0$

$\therefore \quad x=0,\ 4$

③に代入

$(x,y)=(0,-2),\ (4,2)$

(10) $\begin{cases} x^2+2x-3 \geqq 0 \ \cdots ① \\ 2x^2-3x-2<0 \ \cdots ② \end{cases}$

①より

$(x-1)(x+3) \geqq 0$

$x \leqq -3,\ 1 \leqq x$

②より

$(2x+1)(x-2)<0$

$-\dfrac{1}{2}<x<2$

$\therefore \quad 1 \leqq x<2$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-1/2$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)(x+3)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
①	○	○	×	×	×	○	○	○	○
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x+1)(x-2)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
②	×	×	×	×	○	○	○	×	×
①かつ②	×	×	×	×	×	○	○	×	×

4.2 問題

(1) $8-3x=2x-7$

(2) $8-3x \geqq 2x-7$

(3) $2x^2-7x+3=0$

(4) $2x^2-7x+3<0$

(5) $4x^2-4x+1=0$

(6) $4x^2-4x+1 \leqq 0$

(7) $12-x-x^2=0$

(8) $12-x-x^2 \leqq 0$

(9) $12x^3-8x^2-3x+2=0$

(10) $12x^3-8x^2-3x+2>0$

(11) $\dfrac{2x^2-x+12}{x-2}=x-4$

(12) $\dfrac{2x^2-x+12}{x-2} \leqq x-4$

(13) $\dfrac{11+x^2}{2+x}=\dfrac{7-x^2}{1+x}$

(14) $\dfrac{11+x^2}{2+x} \geqq \dfrac{7-x^2}{1+x}$

(15) $\begin{cases} (x-1)^2+2y^2=27 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$

(16) $\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ x^2 \leqq 16 \end{cases}$

4.3 解答

(1) $8-3x=2x-7$

$x=3$

(2) $8-3x \geqq 2x-7$

$x \leqq 3$

(3) $2x^2-7x+3=0$

$x=\frac{1}{2}$, 3

(4) $2x^2-7x+3<0$

$\frac{1}{2}<x<3$

(5) $4x^2-4x+1=0$

$x=\frac{1}{2}$

(6) $4x^2-4x+1 \leqq 0$

$x=\frac{1}{2}$

(7) $12-x-x^2=0$

$x=-4$, 3

(8) $12-x-x^2 \leqq 0$

$x \leqq -4$, $3 \leqq x$

(9) $12x^3-8x^2-3x+2=0$

$x=\pm\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$

(10) $12x^3-8x^2-3x+2>0$

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}<x$

(11) $\dfrac{2x^2-x+12}{x-2}=x-4$

$x=-4$, -1

(12) $\dfrac{2x^2-x+12}{x-2} \leqq x-4$

$x \leqq -4$, $-1 \leqq x<2$

(13) $\dfrac{11+x^2}{2+x}=\dfrac{7-x^2}{1+x}$

$x=\frac{1}{2}$, $-1\pm\sqrt{2}\,i$

(14) $\dfrac{11+x^2}{2+x} \geqq \dfrac{7-x^2}{1+x}$

$-2<x<-1$, $\frac{1}{2} \leqq x$

(15) $\begin{cases} (x-1)^2+2y^2=27 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$

$(x,y)=(4,3),\ (-4,-1)$

(16) $\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ x^2 \leqq 16 \end{cases}$

$-4 \leqq x<-2,\ 3<x \leqq 4$