5　平面座標

5.1　軌跡

例 5.1 $\mathrm{A}(-2, 3)$，$\mathrm{B}(4, 1)$ のとき，次の条件を満たす点 $\mathrm{P}(x, y)$ 全体からなる図形（軌跡）を求めなさい。

(1) $\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 = 70$

(2) $\mathrm{AP} \perp \mathrm{AB}$ すなわち $\angle\mathrm{PAB} = 90°$

解答

(1)

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 = 70 \\
& \left\{(x+2)^2 + (y-3)^2\right\} + \left\{(x-4)^2 + (y-1)^2\right\} = 70 \\
& x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 70 \\
& 2(x^2 - 2x + y^2 - 4y) = 40 \\
& x^2 - 2x + y^2 - 4y = 20 \\
& x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 25 \\
\therefore \quad & (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25
\end{aligned}
$$

(2)

三平方の定理より

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{AP}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{BP}^2 \\
& \left\{(x+2)^2 + (y-3)^3\right\} + \left\{6^2 + (-2)^2\right\} = (x-4)^2 + (y-1)^2 \\
& x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + 36 + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 \\
& 12x - 4y + 36 = 0 \\
& 4(3x - y + 9) = 0 \\
\therefore \quad & 3x - y + 9 = 0 \quad (\text{または } y = 3x + 9)
\end{aligned}
$$

問題 5.1 $\mathrm{A}(-3, 2)$，$\mathrm{B}(3, -1)$ のとき，次の条件を満たす点 $\mathrm{P}(x, y)$ の軌跡を求めなさい。

(1) $\mathrm{AP}^2 - \mathrm{BP}^2 = 15$

(2) $\mathrm{AP} = 2\mathrm{BP}$

(3) $\mathrm{AP} \perp \mathrm{BP}$ すなわち $\angle\mathrm{APB} = 90°$

5.2 領域

例 5.2

(1) $y=x$ 上の点 $\mathrm{A}(a,a)$ と $y=-x$ 上の点 $\mathrm{B}(a-2, 2-a)$ を通る直線 ℓ_a の方程式を求めよ。

(2) a がすべての実数の範囲を動くとき，ℓ_a が通る範囲（領域）を求めよ。

解答

(1)

$$\begin{aligned} y &= \frac{a-(2-a)}{a-(a-2)}(x-a)+a \\ &= \frac{2a-2}{2}(x-a)+a \\ &= (a-1)(x-a)+a \\ &= (a-1)x-a^2+a+a \\ \therefore\quad y &= (a-1)x-a^2+2a \end{aligned}$$

(2) x を固定し，a を動かしたときに，y が動く範囲を x を用いて表す。

$$\begin{aligned} y &= (a-1)x-a^2+2a \\ &= ax-x-a^2+2a \\ &= -a^2+(x+2)a-x \\ &= -\left\{a^2-2\cdot\frac{x+2}{2}a\right\}-x \\ &= -\left\{\left(a-\frac{x+2}{2}\right)^2-\left(\frac{x+2}{2}\right)^2\right\}-x \\ &= -\left(a-\frac{x+2}{2}\right)^2+\frac{x^2+4x+4}{4}-x \\ &= -\left(a-\frac{x+2}{2}\right)^2+\frac{x^2}{4}+x+1-x \\ &= -\left(a-\frac{x+2}{2}\right)^2+\frac{x^2}{4}+1 \\ \therefore\quad y &\leqq \frac{x^2}{4}+1 \end{aligned}$$

問題 5.2

(1) x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,0)$ からの距離 AP と，y 軸上の点 $\mathrm{B}(0,2)$ からの距離 BP が等しいような点 $\mathrm{P}(x,y)$ の軌跡 ℓ_a の方程式を求めよ。

(2) a がすべての実数の範囲を動くとき，ℓ_a が通る範囲（領域）を求めよ。

5.3 解答

問題 5.1

(1)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2 - \mathrm{BP}^2 = 15\\
&\left\{(x+3)^2 + (y-2)^2\right\} - \left\{(x-3)^2 + (y+1)^2\right\} = 15\\
&\left\{x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4\right\} - \left\{x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1\right\} = 15\\
&12x - 6y = 12\\
\therefore\quad &2x - y = 2 \quad (\text{あるいは } y = 2x - 2)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2 = 4\mathrm{BP}^2\\
&(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4\left\{(x-3)^2 + (y+1)^2\right\}\\
&x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 4\left\{x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1\right\}\\
&x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 + 8y + 4\\
&0 = 3x^2 - 30x + 3y^2 + 12y + 27\\
&x^2 - 10x + y^2 + 4y + 9 = 0\\
&x^2 - 2\cdot 5x + y^2 + 2\cdot 2y = -9\\
&(x-5)^2 - 5^2 + (y+2)^2 - 2^2 = -9\\
\therefore\quad &(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20
\end{aligned}$$

(3)

三平方の定理より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 = \mathrm{AB}^2\\
&\left\{(x+3)^2 + (y-2)^2\right\} + \left\{(x-3)^2 + (y+1)^2\right\} = 6^2 + (-3)^2\\
&x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 36 + 9\\
&2x^2 + 2y^2 - 2y = 22\\
&x^2 + y^2 - y = 11\\
&x^2 + y^2 - 2\cdot\frac{1}{2}y = 11\\
&x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 11\\
&x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 11\\
\therefore\quad &x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}
\end{aligned}$$

問題 5.2

(1)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2 \\
&(x-a)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2 \\
&x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \\
&4y = 2ax - a^2 + 4 \\
\therefore \quad &y = \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4} + 1
\end{aligned}$$

(2) x を固定し，a を動かしたときに，y が動く範囲を x を用いて表す。

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{4}a^2 + \frac{x}{2}a + 1 \\
&= -\frac{1}{4}\left\{a^2 - 2xa\right\} + 1 \\
&= -\frac{1}{4}\left\{(a-x)^2 - x^2\right\} + 1 \\
&= -\frac{1}{4}(a-x)^2 + \frac{x^2}{4} + 1 \\
\therefore \quad y &\leqq \frac{x^2}{4} + 1
\end{aligned}$$