7 数列

7.1 等差数列

隣り合う 2 項の差 $a_{n+1} - a_n$ がすべて等しい数列を**等差数列**と言い，この差を**公差**[*1] と言う。

初項が a_1，公差が d の等差数列の一般項

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} \cdots\cdots \xrightarrow{+d} a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n$$

$$a_n = a_1 + \underbrace{d + \cdots + d}_{n-1\text{ 個}} = a_1 + d(n-1)$$

一般項が $a_n = pn + q$ で表される数列

$$\begin{cases} \text{初項：} & a_1 = p + q \\ \text{公差：} & p \end{cases} \quad \text{の等差数列である。}$$

数列の和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{を} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{と書く。}$$

等差数列の和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ は次のようにして求められる。

$$\begin{array}{rrcccccccccc} & S_n & = & a_1 & + & a_2 & + \cdots + & a_{n-1} & + & a_n & & \\ & S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + \cdots + & a_2 & + & a_1 & & \\ \hline \therefore & 2S_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_1 + a_n) & + \cdots + & (a_1 + a_n) & + & (a_1 + a_n) & = & n(a_1 + a_n) \end{array}$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1}{2} n(a_1 + a_n)$$

等差数列の和

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2} n(a_1 + a_n) \qquad \left(\frac{1}{2}\text{項数} \times (\text{初項} + \text{末項})\right)$$

問題 7.1

(1) 初項が 3，公差が 5 の等差数列$\{a_n\}$の一般項と，初めの 20 項の和 $\sum_{k=1}^{20} a_k$を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^{20} (3k - 1)$ を求めよ。

[*1] “公” には “共通の” という意味がある。

7.2 等比数列

隣り合う 2 項の比 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ がすべて等しい数列を**等比数列**と言い，その比を**公比**と言う。

初項が a_1，公比が r の等比数列の一般項

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} \cdots\cdots \xrightarrow{\times r} a_{n-1} \xrightarrow{\times r} a_n$$

$$a_n = a_1 \times \underbrace{r \times \cdots \times r}_{n-1\text{ 個}} = a_1\, r^{n-1}$$

公比 r が 1 でない等比数列の和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ は，次のようにして求められる。

$$\begin{array}{rrcccccccccccc}
 & rS_n & = & & & a_2 & + & a_3 & + \cdots + & a_{n-1} & + & a_n & + & a_{n+1} \\
 & S_n & = & & a_1 & + a_2 & + & a_3 & + \cdots + & a_{n-1} & + & a_n & & \\
\hline
\therefore & (r-1)S_n & = & - & a_1 & & & & & & & & + & a_{n+1}
\end{array}$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{r-1}$$

初項が a，公比が r の等比数列の和

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} r \times a & (r = 1) \\[2mm] \dfrac{a_{n+1} - a_1}{r-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1} & (r \neq 1 \text{ 特に } r > 1) \\[2mm] \dfrac{a_1 - a_{n+1}}{1-r} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1-r} & (r \neq 1 \text{ 特に } r < 1) \end{cases}$$

問題 7.2

(1) 初項が 12，公比が 2 の等比数列$\{a_n\}$の一般項と，初めの 8 項の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} a_k$を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(\sqrt{3}\right)^k$ を求めよ。

7.3 数列の極限

x^n の極限

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & (x > 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 0 & (|x| < 1) \\ \text{なし} & (x < -1) \end{cases}$$

問題 7.3 初項が 2，公比が $\dfrac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ について次の問に答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

(3) 無限和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

問題 7.4 循環小数 $0.27272727\cdots$ は等比数列の無限和 $0.27 + 0.0027 + 0.000027 + \cdots$ である。

(1) この等比数列の一般項 a_n を求めよ。

(2) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を式で表せ。

(3) 無限和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ を分数で表せ。

7.4 数列の和

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1)$ は次のようにして求められる。

$$
\begin{array}{rrcllcrcl}
 & 1\cdot 2\times 3 & = & 1\cdot 2\times(3-0) & = & & 1\cdot 2\cdot 3 & - & 0\cdot 1\cdot 2 \\
 & 2\cdot 3\times 3 & = & 2\cdot 3\times(4-1) & = & & 2\cdot 3\cdot 4 & - & 1\cdot 2\cdot 3 \\
 & 3\cdot 4\times 3 & = & 3\cdot 4\times(5-2) & = & & 3\cdot 4\cdot 5 & - & 2\cdot 3\cdot 4 \\
 & \vdots & & & & & \vdots & & \\
 & n(n+1)\times 3 & = & & = & & n(n+1)(n+2) & - & (n-1)(n(n+1) \\
\hline
\therefore & S_n\times 3 & = & & = & & n(n+1)(n+2) & - & 0\cdot 1\cdot 2 \\
\therefore & \sum_{k=1}^{n} k(k+1) & = & \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) & & & & &
\end{array}
$$

同様にして次の公式が得られる。

$\sum$ の公式

$$
\begin{array}{lcll}
\sum_{k=1}^{n} 1 & = & n & \\
\sum_{k=1}^{n} k & = & \frac{1}{2}n(n+1) & \text{(等差数列)} \\
\sum_{k=1}^{n} k(k+1) & = & \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) & \\
\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) & = & \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) & \\
\vdots & & & \\
\sum_{k=1}^{n} k(k-1) & = & \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) & \\
\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) & = & \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2) & \\
\vdots & & &
\end{array}
$$

問題 7.5 次の手順に従って，$\sum_{k=1}^{n} k^3$ を求めよ。

(1) $k^3 = k(k-1)(k-2) + Ak(k-1) + Bk + C$ の形にする（k に $0,1,2$ を代入するとわかる）。

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) + A\sum_{k=1}^{n} k(k-1) + B\sum_{k=1}^{n} k + C\sum_{k=1}^{n} 1$ に上の公式を適用する。

7.5 解答

問題 7.1

(1)
$$a_n = 3+5(n-1) = 5n-2$$
$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{1}{2}20(3+98) = 10100$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{20}(3k-1) = \frac{1}{2}20(2+59) = 610$$

問題 7.2

(1)
$$a_n = 12\cdot 2^{n-1} = 3\cdot 2^{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^{8} 3\cdot 2^{n+1} = \frac{12(2^8-1)}{2-1} = 12\cdot 255 = 3060$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{3})^k = \frac{\sqrt{3}\left((\sqrt{3})^{10}-1\right)}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{3}\left(243-1\right)}{3-1} = 121\left(3+\sqrt{3}\right)$$

問題 7.3

(1)
$$a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} = 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

(3)
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 3(1-0) = 3$$

問題 7.4

(1)
$$a_n = 0.27\cdot(0.01)^{n-1}$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{0.27((1-(0.01)^n)}{1-0.01} = \frac{27}{99}\left(1-(0.01)^n\right) = \frac{3}{11}\left(1-(0.01)^n\right)$$

(3)
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{11}\left(1-(0.01)^n\right) = \frac{3}{11}(1-0) = \frac{3}{11}$$

問題 7.5

(1)
$$\begin{array}{lcll}
 & & k^3 = k(k-1)(k-2)+Ak(k-1)+Bk+C & \\
k=0 & \to & 0 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad C & \therefore\ C=0 \\
k=1 & \to & 1 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad B+C & \therefore\ B=1 \\
k=2 & \to & 8 = \qquad\qquad\qquad 2A\quad +2B+C & \therefore\ A=3 \\
\therefore & & k^3 = k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k &
\end{array}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)+3\sum_{k=1}^{n} k(k-1)+\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)+\frac{3}{3}(n+1)n(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)n \\
&= \frac{1}{4}(n+1)n\left((n-1)(n-2)+4(n-1)+2\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)n\left(n^2+n\right) = \frac{1}{4}(n+1)^2n^2
\end{aligned}$$