

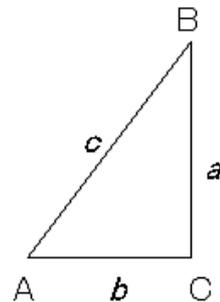
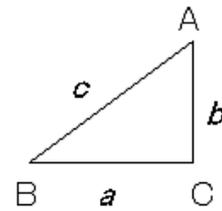
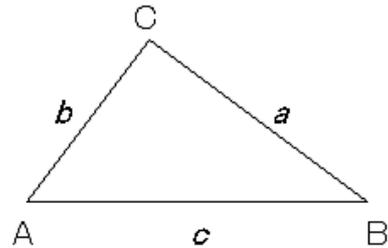
8 三角比

対応する角がそれぞれ等しい2つの三角形は相似である。言い換えると、三角形の3つの角を定めると3辺の比が定まる。

8.1 鋭角の三角比

右図の直角三角形ABCは大きさと向きは違うが、形はみな同じである。

すなわち、辺 a, b, c の長さは三角形によって異なるが、角 $A, B, C (= 90^\circ)$ の大きさと、3辺の比 $a : b : c$ はどの三角形も同じである。



正弦 (sine)	正弦 = $\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$
$\sin A = \frac{a}{c}$	$\sin B = \frac{b}{c}$
余弦 (co-sine)	余弦 = $\frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$
$\cos A = \frac{b}{c}$	$\cos B = \frac{a}{c}$
正接 (tangent)	正接 = $\frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}$
$\tan A = \frac{a}{b}$	$\tan B = \frac{b}{a}$

注 8.1 (余角) $90^\circ - A$ を A の余角 (co-angle) と言う。

余弦 = 余角の正弦 すなわち $\cos A = \sin(90^\circ - A) = \sin B$ という意味である。

余角公式		
$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$	$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$	$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$

8.2 相互関係

問題 8.1 次の空欄を埋めなさい。

$\angle RPQ = 90^\circ$, $PH \perp QR$ $QR = 1$ とする。

(1) 三角形 PQR において

$$x = [\quad] , \quad y = [\quad]$$

(2) 三角形 PQH において

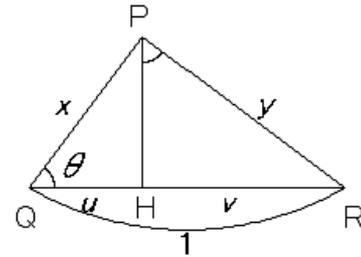
$$u = x [\quad] \quad \therefore \quad u = [\quad]$$

(3) 三角形 PRH において

$$v = y [\quad] \quad \therefore \quad v = [\quad]$$

(4) $u + v = 1$ だから

$$[\quad] + [\quad] = 1$$



三角比の相互関係

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

注 8.2 (三角比の n 乗) 正の整数 n について

$(\sin \theta)^n, (\cos \theta)^n, (\tan \theta)^n$ をそれぞれ $\sin^n \theta, \cos^n \theta, \tan^n \theta$ と書く。

問題 8.2

(1) 角 A が鋭角で $\cos A = \frac{1}{3}$ のとき, $\sin A, \tan A$ の値を求めなさい。

(2) 角 A が鋭角で $\tan A = 2$ のとき, $\cos A, \sin A$ の値を求めなさい。

8.3 正弦定理・余弦定理

問題 8.3 右の図について，次の空欄を埋めなさい。

- (1) 三角形 CBH において， h を a と B を用いて表すと

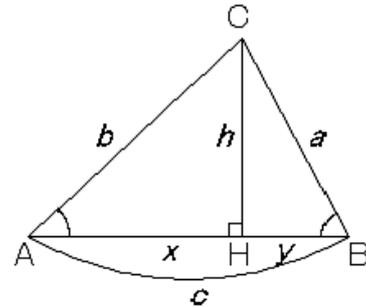
$$h = [\quad]$$

- (2) 三角形 CAH において， h を b と A を用いて表すと

$$h = [\quad]$$

- (3) ゆえに

$$a : b = [\quad] : [\quad]$$



正弦定理

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

問題 8.4 上の同じ図について，次の空欄を埋めなさい。

- (1) 三角形 CAH において， x を b, A を用いて表すと

$$x = [\quad]$$

- (2) 三角形 CBH において， y を a, B を用いて表すと

$$y = [\quad]$$

- (3) ゆえに

$$c = [\quad] + [\quad]$$

第一余弦定理

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

問題 8.5 次の空欄を埋めなさい。

- (1) 第一余弦定理の, 1 番目の式の両辺に a をかけると

$$a^2 = [\quad] + [\quad]$$

- (2) 同様に, 2 番目の式に b , 3 番目の式に c をかけると

$$b^2 = [\quad] + [\quad]$$

$$c^2 = [\quad] + [\quad]$$

- (3) ゆえに

$$a^2 - b^2 - c^2 = [\quad]$$

第二余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

問題 8.6

- (1) $A = 75^\circ, B = 60^\circ, c = 2$ の三角形 ABC の C, b, a を求めなさい。
- (2) $A = 60^\circ, b = 5, c = 8$ の三角形の a, B, C を求めなさい。 B, C は下の表を参考にして, 最も近い整数値で答えなさい。

三角比の表

	sin	cos		sin	cos		sin	cos
0°	0.0000	1.0000	15°	0.2588	0.9659	30°	0.5000	0.8660
1°	0.0175	0.9998	16°	0.2756	0.9613	31°	0.5150	0.8572
2°	0.0349	0.9994	17°	0.2924	0.9563	32°	0.5299	0.8480
3°	0.0523	0.9986	18°	0.3090	0.9511	33°	0.5446	0.8387
4°	0.0698	0.9976	19°	0.3256	0.9455	34°	0.5592	0.8290
5°	0.0872	0.9962	20°	0.3420	0.9397	35°	0.5736	0.8192
6°	0.1045	0.9945	21°	0.3584	0.9336	36°	0.5878	0.8090
7°	0.1219	0.9925	22°	0.3746	0.9272	37°	0.6018	0.7986
8°	0.1392	0.9903	23°	0.3907	0.9205	38°	0.6157	0.7880
9°	0.1564	0.9877	24°	0.4067	0.9135	39°	0.6293	0.7771
10°	0.1736	0.9848	25°	0.4226	0.9063	40°	0.6428	0.7660
11°	0.1908	0.9816	26°	0.4384	0.8988	41°	0.6561	0.7547
12°	0.2079	0.9781	27°	0.4540	0.8910	42°	0.6691	0.7431
13°	0.2250	0.9744	28°	0.4695	0.8829	43°	0.6820	0.7314
14°	0.2419	0.9703	29°	0.4848	0.8746	44°	0.6947	0.7193
15°	0.2588	0.9659	30°	0.5000	0.8660	45°	0.7071	0.7071

8.4 解答

問題 8.1

$$(1) \quad x = \cos \theta \quad y = \sin \theta$$

$$(2) \quad u = x \cos \theta \quad u = \cos^2 \theta$$

$$(3) \quad v = y \sin \theta \quad y = \sin^2 \theta$$

$$(4) \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

問題 8.2

$$(1) \quad \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \therefore \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$(2) \quad \frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \tan^2 A = 1 + 4 = 5 \quad \therefore \cos A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin A = \tan A \cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

問題 8.3

$$(1) \quad h = a \sin B$$

$$(2) \quad h = b \sin A$$

$$(3) \quad a : b = \sin A : \sin B$$

問題 8.4

$$(1) \quad x = b \cos A$$

$$(2) \quad y = a \cos B$$

$$(3) \quad c = b \cos A + a \cos B$$

問題 8.5

$$(1) \quad a^2 = ab \cos C + ac \cos B$$

$$(2) \quad b^2 = bc \cos A + ba \cos C$$

$$c^2 = ca \cos B + cb \cos A$$

$$(3) \quad a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A$$

問題 8.6

$$(1) \quad C = 180^\circ - A - B = 45^\circ$$

$$b = \frac{\sin B}{\sin C} c = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \cdot 2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 2 = \sqrt{6}$$

$$a = b \cos C + c \cos B = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} + 1$$

$$(2) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49$$

$$\therefore a = 7$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{64 + 49 - 25}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{11}{14} = 0.7851$$

$$\therefore B \approx 38^\circ$$

$$C = 180^\circ - A - B \approx 82^\circ$$