9 三角関数

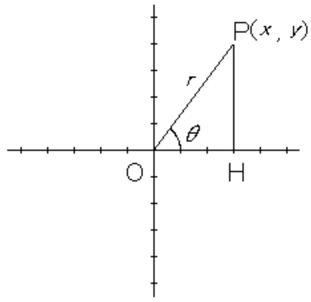
9.1 動径と偏角

座標平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ について，原点OとPの距離 $r = \mathrm{OP}$ を P の**径長**，x 軸の正の部分を原点Oを中心にして回転して直線OPに重なるようにしたときの回転した角 θをPの**偏角**といいます。ただし回転の向きを反時計回りを正方向，時計回りを負方向とします。偏角 θは 360° を何回でもプラスマイナスしてもよいので無数にありますが，そのうちの１つの値，ふつうは $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ または $-180^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ の値を言います。

Pの座標 x, y および OPの傾き m と径長 r および偏角 θの関係を直角三角形POHを見ながら考えて見ましょう。

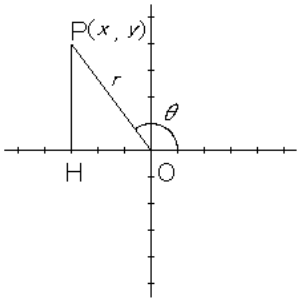
(1) P が第１象限（$x > 0, y > 0$，$0^\circ < \theta < 90^\circ$）にある場合。

$$x = +r\cos\angle\mathrm{POH} = +r\cos\theta$$
$$y = +r\sin\angle\mathrm{POH} = +r\sin\theta$$
$$m = +\tan\angle\mathrm{POH} = +\tan\theta$$



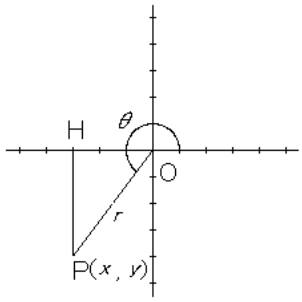
(2) P が第２象限（$x < 0, y > 0$，$90^\circ < \theta < 180^\circ$）にある場合。

$$x = -r\cos\angle\mathrm{POH} = -r\cos(180^\circ - \theta)$$
$$y = +r\sin\angle\mathrm{POH} = +r\sin(180^\circ - \theta)$$
$$m = -\tan\angle\mathrm{POH} = -\tan(180^\circ - \theta)$$



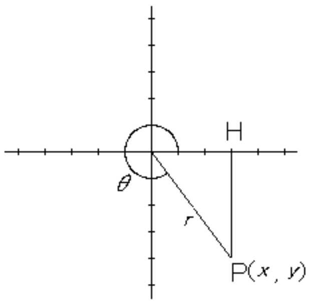
(3) P が第３象限（$x < 0, y < 0$，$180^\circ < \theta < 270^\circ$）にある場合。

$$x = -r\cos\angle\mathrm{POH} = -r\cos(\theta - 180^\circ)$$
$$y = -r\sin\angle\mathrm{POH} = -r\sin(\theta - 180^\circ)$$
$$m = +\tan\angle\mathrm{POH} = +\tan(\theta - 180^\circ)$$



(4) P が第４象限（$x > 0, y < 0$，$270^\circ < \theta < 360^\circ$）にある場合。

$$x = +r\cos\angle\mathrm{POH} = +r\cos(360^\circ - \theta)$$
$$y = -r\sin\angle\mathrm{POH} = -r\sin(360^\circ - \theta)$$
$$m = -\tan\angle\mathrm{POH} = -\tan(360^\circ - \theta)$$



9.2　一般角の，$\sin, \cos, \tan$

一般角 θ（$-\infty < \theta < +\infty$，すなわち実数全体）について次のように定義します。ただし，θ_0 は角 θの動径が x 軸となす鋭角（前頁の $\angle\mathrm{POH}$）とします。

θ	$0°$	第 1 象限	$90°$	第 2 象限	$180°$	第 3 象限	$270°$	第 4 象限	$360°$
$\sin\theta$	0	$+\sin\theta_0$	1	$+\sin\theta_0$	0	$-\sin\theta_0$	-1	$-\sin\theta_0$	0
$\cos\theta$	1	$+\cos\theta_0$	0	$-\cos\theta_0$	-1	$-\cos\theta_0$	0	$+\cos\theta_0$	1
$\tan\theta$	0	$+\tan\theta_0$	$\times$	$-\tan\theta_0$	0	$+\tan\theta_0$	$\times$	$-\tan\theta_0$	0

このように定義すると，点 $\mathrm{P}(x, y)$ が座標平面上のどこにあっても，次の関係が成り立ちます。

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad m = \tan\theta$$

問題 9.1 次の角 αについて，$\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ の値を求めなさい。

(1)　$300°$　　(2)　$-150°$　　(3)　$900°$

9.3　弧度法

角の大きさを角度ではなくて，半径 1 の円の弧の長さで表したものを**弧度**と言います。前頁の図の角を表している円弧の長さです。単位は**ラヂアン (radian)** ですが（省略して）書きません。

角度と弧度の変換公式

$$\alpha° \quad \to \quad \theta = \frac{\alpha}{180}\pi \qquad\qquad \theta \quad \to \quad \alpha° = \frac{180\,\theta}{\pi}^{\circ}$$

問題 9.2 次の角 θについて，$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めなさい。

(1)　$\dfrac{2\pi}{3}$　　(2)　$\dfrac{17\pi}{4}$　　(3)　$-\dfrac{3\pi}{2}$

問題 9.3 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で次の方程式，不等式を解きなさい。

(1.1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　(1.2)　$\sin\theta > \dfrac{1}{2}$　　(1.3)　$\sin\theta < \dfrac{1}{2}$

(2.1)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2.2)　$\cos\theta > -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2.3)　$\cos\theta < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3.1)　$\tan\theta = -\sqrt{3}$　　(3.2)　$\tan\theta > -\sqrt{3}$　　(3.3)　$\tan\theta < -\sqrt{3}$

ヒント　単位円 $x^2 + y^2 = 1$ と次の直線を描いて考える。

(1)　直線 $y = \dfrac{1}{2}$　　(2)　直線 $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　直線 $y = -\sqrt{3}x$

問題 9.4 次の不等式を解きなさい。ただし $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。

(1)　$2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 \geqq 0$　　(2)　$\sqrt{3}\tan^2\theta + 2\tan\theta - \sqrt{3} < 0$

9.4 解答

問題 9.1

(1)
$$\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 300^\circ = +\cos 60^\circ = +\frac{1}{2}$$
$$\tan 300^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

(2)
$$\sin(-150)^\circ = \sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$\cos(-150)^\circ = \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan(-150)^\circ = \tan 210^\circ = +\tan 30^\circ = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3)
$$\sin 900^\circ = \sin 180^\circ = 0$$
$$\cos 900^\circ = \cos 180^\circ = -1$$
$$\tan 900^\circ = \tan 180^\circ = 0$$

問題 9.2

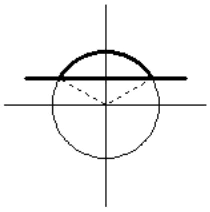
(1)
$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin 120^\circ = +\sin 60^\circ = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{2\pi}{3} = \tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

(2)
$$\sin\frac{17\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\frac{17\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan\frac{17\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{4} = \tan 45^\circ = +1$$

(3)
$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = +1$$
$$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$$
$$\tan\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \tan\frac{\pi}{2} = \tan 90^\circ = \times$$

問題 9.3

(1)

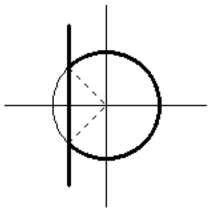


(1.1) $\theta = \dfrac{\pi}{6}\ ,\ \dfrac{5\pi}{6}$

(1.2) $\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{5\pi}{6}$

(1.3) $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6}\ ,\ \dfrac{5\pi}{6} < \theta < 2\pi$

(2)

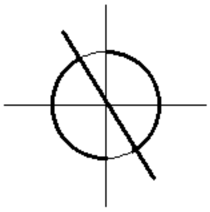


(2.1) $\theta = \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}$

(2.2) $0 \leqq \theta < \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4} < \theta < 2\pi$

(2.3) $\dfrac{3\pi}{4} < \theta < \dfrac{5\pi}{4}$

(3)



(3.1) $\theta = \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}$

(3.2) $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2\pi}{3} < \theta < \dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi$

(3.3) $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{3\pi}{2} < \theta < \dfrac{5\pi}{3}$

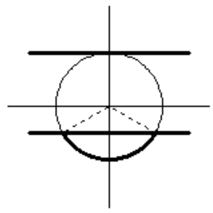
問題 9.4

(1)

$$0 \leqq 2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = (2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 1)$$

$$\therefore \quad \sin\theta \leqq -\frac{1}{2}\ ,\ 1 \leqq \sin\theta$$

$$\therefore \quad -\frac{5\pi}{6} \leqq \theta \leqq -\frac{\pi}{6}\ ,\ \theta = \frac{\pi}{2}$$



(2)

$$0 > \sqrt{3}\tan^2\theta + 2\tan\theta - \sqrt{3} = (\sqrt{3}\tan\theta - 1)(\tan\theta + \sqrt{3})$$

$$\therefore \quad -\sqrt{3} < \tan\theta < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad -\pi < \theta < -\frac{5\pi}{6}\ ,\ -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{2\pi}{3} < \theta \leqq \pi$$