10　指数・対数関数

10.1　指数関数の定義

$a > 0$ に対して a^x を次のように定義します。

x が自然数 n のとき

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}$$

x が 0 または負の整数 $-n$ のとき

$$a^0 = 1 \qquad\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

x が有理数 $\dfrac{n}{m}$ のとき

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \quad (a^n \text{の正の } m \text{ 乗根})$$

x が無理数のとき

$0 < a < 1$ の場合 :

$a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad$ すべての有理数 $p < x$ について $a^p > y$ 　かつ
すべての有理数 $q > x$ について $a^q < y$

$a > 1$ の場合 :

$a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad$ すべての有理数 $p < x$ について $a^p < y$ 　かつ
すべての有理数 $q > x$ について $a^q > y$

10.2　指数関数の性質

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(2) $a^{z-y} = \dfrac{a^z}{a^y}$

(3) $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$

(4) $a^{\frac{z}{y}} = \sqrt[y]{a^z}$ 　(ただし, y は正の整数)

(5) $0 < a < 1$ の場合 :　$x < y \iff a^x > a^y$

(6) $1 < a$ の場合 :　$x < y \iff a^x < a^y$

10.3　対数関数の定義

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき，正の実数 X に対して $a^x = X$ となる実数 x が 1 つだけあります。この x を**底**(てい) a についての X の**対数 (logarithm)** と言い，$\log_a X$ で表します。すなわち

$$x = \log_a X \iff X = a^x$$

10.4　対数関数の性質

(1)　$\log_a a^x = x$

(2)　$a^{\log_a X} = X$

(3)　$\log_a (X \cdot Y) = \log_a X + \log_a Y$

(4)　$\log_a \dfrac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$

(5)　$\log_a X^y = y \log_a X$

(6)　$\log_X Y = \dfrac{\log_a Y}{\log_a X}$　(底の変換公式)

(7)　$0 < a < 1$　の場合：　$X < Y \iff \log_a X > \log_a Y$

(8)　$1 < a$　の場合：　$X < Y \iff \log_a X < \log_a Y$

10.5　常用対数

底が 10 の対数 $\log_{10}$ を常用対数といい，底を省略して $\log$ と書くことがある[*1]。

大きな数

X の桁数が n　$\iff$　$n = (\log_{10} X$ の整数部分$) + 1$

X の先頭の数字が a　$\iff$　$\log_{10} a \leqq (\log_{10} X$ の小数部分$) < \log_{10} (a+1)$

[*1] 微分積分学では，$\log$ は自然対数（底が $e = 2.71828\cdots$ の対数）$\log_e$ を表す。

例 10.1 対数関数の公式 (3) を証明しなさい。

$x = \log_a X,\ y = \log_a Y$ とおくと

$X = a^x,\ Y = a^y$

$\log_a (X \cdot Y) = \log_a (a^x \cdot a^y) = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a X + \log_a Y$

問題 10.1 対数関数の公式 (5), (7) を証明しなさい。

問題 10.2 次の式を整理しなさい.

(1) $50^{\frac{1}{2}} - 32^{\frac{1}{2}}$

(2) $27^{\frac{2}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}$

(3) $8^{-\frac{1}{2}} \cdot 4^{-\frac{1}{4}}$

(4) $\log_3 81 - \log_2 128$

(5) $9^{\log_3 7}$

(6) $(\log_3 8)(\log_4 25)(\log_5 27)$

問題 10.3 次の方程式・不等式を解きなさい.

(1) $4^x = 9$

(2) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < \sqrt{2}$

(4) $\log_2 x^2 - \log_4 x = 12$

(5) $\log_{0.5}(x + 2) > 2$

問題 10.4 次の表の空欄を埋めなさい.

$\log_{10} 1$	$\log_{10} 2$	$\log_{10} 3$	$\log_{10} 4$	$\log_{10} 5$	$\log_{10} 6$	$\log_{10} 7$	$\log_{10} 8$	$\log_{10} 9$	$\log_{10} 10$
0.0000	0.3010	0.4771				0.8451			

問題 10.5 3^{100} の桁数 n と先頭の数字 a を求めなさい（**10.4** の表を使う）。

問題 10.6 5^{3^2} と 6^{2^3} はどちらが大きいですか（**10.4** の表を使う）。

10.6　解答

問題 10.1

$x=\log_a X,\ y=\log_a Y$　とおくと　$X=a^x,\ Y=a^y$

(5) $\log_a X^y=\log_a (a^x)^y=\log_a a^{xy}=xy=y\log_a X$

(7)
$$X^{\frac{\log_a Y}{\log_a X}}=(a^x)^{\frac{y}{x}}=a^{\left(x\cdot\frac{y}{x}\right)}=a^y=Y$$
$$\therefore\quad \log_X Y=\frac{\log_a Y}{\log_a X}$$

問題 10.2

(1) $50^{\frac{1}{2}}-32^{\frac{1}{2}}=(2\cdot 5^2)^{\frac{1}{2}}-(2^5)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot(5^2)^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^2=2^{\frac{1}{2}}(5-4)=\sqrt{2}$

(2) $27^{\frac{2}{3}}+8^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}+(2^3)^{\frac{2}{3}}=3^2+2^2=9+4=13$

(3) $8^{-\frac{1}{2}}\cdot 4^{-\frac{1}{4}}=(2^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2^2)^{-\frac{1}{4}}=2^{-\frac{3}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$

(4) $\log_3 81-\log_2 128=\log_3 3^4-\log_2 2^7=4-7=-3$

(5) $9^{\log_3 7}=(3^2)^{\log_3 7}=3^{(2\log_3 7)}=3^{\log_3 7^2}=7^2=49$

(6)
$$(\log_3 8)(\log_4 25)(\log_5 27)=\frac{\log_2 8}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 25}{\log_2 4}\cdot\frac{\log_2 27}{\log_2 5}=\frac{\log_2 2^3\cdot\log_2 5^2\cdot\log_2 3^3}{\log_2 3\cdot\log_2 2^2\cdot\log_2 5}$$
$$=\frac{3\log_2 2\cdot 2\log_2 5\cdot 3\log_2 3}{\log_2 3\cdot 2\log_2 2\cdot\log_2 5}=9$$

問題 10.3

(1) $4^x=9$

$$x=\log_4 9=\frac{\log_2 9}{\log_2 4}=\frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}=\frac{2\log_2 3}{2}=\log_2 3$$

(2) $9^x-4\cdot 3^{x+1}+27=0$

$$0=(3^2)^x-12\cdot 3^x+27=3^{2x}-12\cdot 3^x+27=(3^x)^2-12\cdot 3^x+27=(3^x-3)(3^x-9)$$
$$\therefore\quad 3^x=3,\ 9$$
$$x=1,\ 2$$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\sqrt{2}$

$$2^{-x}<2^{\frac{1}{2}}$$
$$\therefore\quad -x<\frac{1}{2}$$
$$x>\frac{1}{2}$$

(4) $\log_2 x^2 - \log_4 x = 12$

$$12 = 2\log_2 x - \frac{\log_2 x}{\log_2 2^2} = 2\log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 x = \frac{3}{2}\log_2 x$$

$$8 = \log_2 x$$

$$\therefore \quad x = 2^8 = 256$$

(5) $\log_{0.5}(x+2) > 2$

$$\log_{0.5}(x+2) > \log_{0.5}(0.5)^2$$

$$\log_{0.5}(x+2) > \log_{0.5} 0.25$$

$$\therefore \quad 0 < x+2 < 0.25$$

$$-2 < x < -1.75$$

問題 10.4

$$\begin{aligned}
\log_{10} 4 &= \log_{10} 2^2 = 2\log_{10} 2 = 2\cdot 0.3010 = 0.6020 \\
\log_{10} 5 &= \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990 \\
\log_{10} 6 &= \log_{10} 2\cdot 3 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781 \\
\log_{10} 8 &= \log_{10} 2^3 = 3\log_{10} 2 = 3\cdot 0.3010 = 0.9030 \\
\log_{10} 9 &= \log_{10} 3^2 = 2\log_{10} 3 = 2\cdot 0.4771 = 0.9542
\end{aligned}$$

$\log_{10} 1$	$\log_{10} 2$	$\log_{10} 3$	$\log_{10} 4$	$\log_{10} 5$	$\log_{10} 6$	$\log_{10} 7$	$\log_{10} 8$	$\log_{10} 9$	$\log_{10} 10$
0.0000	0.3010	0.4771	0.6020	0.6990	0.7781	0.8451	0.9030	0.9542	1.0000

問題 10.5 3^{100} の桁数 n と最高位の数字 a を求めなさい。

$$\log_{10} 3^{100} = 100\log_{10} 3 = 100 \times 0.4771 = 47.71$$

$$\therefore \quad n = 47 + 1 = 48$$

表より

$$\log_{10} 5 = 0.6990 < 0.71 < 0.7781 = \log_{10} 6$$

$$\therefore \quad a = 5$$

問題 10.6 5^{3^2} と 6^{2^3} はどちらが大きいか。

5^{3^2} と 6^{2^3} の大小と，$\log_{10} 5^{3^2}$ と $\log_{10} 6^{2^3}$ の大小は一致する。

$$\log_{10} 5^{3^2} = \log_{10} 5^9 = 9\log_{10} 5 = 9\cdot 0.6990 = 6.2910$$

$$\log_{10} 6^{2^3} = \log_{10} 6^8 = 8\log_{10} 6 = 8\cdot 0.7781 = 6.2248$$

$$\therefore \quad 5^{3^2} > 6^{2^3}$$