

## 6 数列の和

数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を計算するプログラムを作ります。

### 6.1 一般項がわかっている数列の場合

一般項が

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

で表される数列  $\{a_n\}$  の和

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

は 1 に収束します。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

$S_n$  が 0.95 以上になるのは  $n$  がいくつからでしょうか。計算してみましょう。

#### 6.1.1 プログラム SuuretsuNoWa1

$S_n$  が 0.95 以上になるまで次々に計算します。

```

1 program SuuretsuNoWa1; // 学生証番号 氏名
2 {$APPTYPE CONSOLE}
3 uses
4   SysUtils;
5
6 var
7   N : Integer;           // 項の番号
8   An : Real;            // 項
9   Sn : Real;            // 和
10
11 begin
12   WriteLn('数列 An の和 Sn=A1+A2+...+An を計算します');
13   WriteLn('ただし, An=1/n(n+1)');
14   WriteLn('和が 0.95 以上になるまで繰り返します。');
15   WriteLn;
16   Sn := 0;              // Sn を 0 に初期設定する
17   N := 1;              // N=1 から始めて
18   repeat              // 繰り返す
19     An := 1/(N*(N+1)); // An を計算する
20     Sn := Sn+An;       // Sn に An を足す
21     WriteLn(N:3, An:10:5, Sn:10:5); // 途中経過を書く
22     Inc(N);           // N を 1 ずつ増やして
23   until Sn >= 0.95;  // Sn 0.95 になるまで
24   WriteLn;
25   Write('Enter を押してください');
26   ReadLn;
27 end.
```

## 注 6.1

(1) 8,9 行目

$A_n, S_n$  はそういう名前の変数です。N を 5 にすると A5, S5 になるというわけではありません。

(2) 16 行目

和を求めるとき, 0 に初期設定します。

$$S_n = 0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

積を求めるときは, 1 に初期設定します。

$$P_n = 1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$$

(3) 17,18,22,23 行目

この 4 行で, “N を 1 から始めて 1 ずつ増やして  $S_n \geq 0.95$  になるまで繰り返す” となっています。

(4) 20 行目

$S_n := S_n + A_n$ ; の右辺の  $S_n$  は古い値, すなわち  $S_{n-1}$  です。左辺の  $S_n$  は新しい値, すなわち  $S_n = S_{n-1} + a_n$  になります。

## 実行

## 注 6.2

(4)  $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$  ですから,  $n = 19$  でちょうど  $S_n = 0.95$  になるはずですが。実行すると, 確かに  $n = 19$  で  $S_n = 0.95$  と表示されますが, それで終了しないで  $n = 20$  まで計算します。これは誤差のためです。

21 行目を,  $S_n$  の小数部分を 16 桁表示させるように変更して実行してください。

0.95 よりほんの少し小さいことがわかります。人が計算しても, 分数のまま計算すれば正確ですが, 小数にして計算すると正確な値は求められません。コンピュータでも, Integer (整数) の計算は正確ですが (ただし 10 桁程度まで), Real (実数) の計算は誤差が生じるので注意が必要です。

## 問 6.1

(1)  $S_n > 0.995$  となるまで繰り返すように変更して, そうなる  $n$  の最小値を求めなさい。

(2)  $n = 98$  まで計算するように変更して,  $S_{98}$  を求めなさい。ちょっと面白いでしょう。

## 6.2 漸化式で定義されている数列の場合

初項と漸化式

$$a_1 = 1$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n-1}$$

で定まる数列  $\{a_n\}$  の和

$$S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)}$$

は、自然対数  $\log x$  の底  $e$  に収束します。

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e \right)$$

$e$  の小数部分 13 桁まで正しく求めるには、 $a_n$  が  $\underbrace{0.0 \cdots 01}_{13 \text{ 桁}} = 10^{-13}$  より小さくなるまで計算すればいいでしょう。

### 6.2.1 プログラム SuuretsuNoWa3

$a_n$  が  $10^{-13}$  より小さくなるまで  $S_n$  を計算します。

```

1 program SuuretsuNoWa2; // 学生証番号 氏名
2 {$APPTYPE CONSOLE}
3 uses
4   SysUtils;
5
6 var
7   N : Integer;           // 項の番号
8   An : Real;            // 項
9   Sn : Real;            // 和
10
11 begin
12   WriteLn('数列 An の和 Sn=A1+A2+...+An を計算します');
13   WriteLn('ただし, A1=1, An=A{n-1}/(n-1)');
14   WriteLn('An が 10^(-13) 以下になるまで繰り返します。');
15   WriteLn;
16   N := 1;               // N=1 のとき
17   An := 1;             // An を A1 に初期設定する
18   Sn := An;           // Sn を A1 に初期設定する
19   WriteLn(N:3, An:20:13, Sn:20:13);
20   N := 2;             // N=2 から始めて
21   repeat              // 繰り返す
22     An := An/(N-1);   // An を計算する
23     Sn := Sn+An;     // Sn に An を足す
24     WriteLn(N:3, An:20:13, Sn:20:13);
25     Inc(N);          // N を 1 増やす。
26   until An <= 1E-13; // An 10^(-13) になるまで
27   WriteLn;
28   Write('Enter を押してください');
29   ReadLn;
30 end.
```

## 注 6.3

(1) 13 行目

 $A\{n-1\}$  は  $a_{n-1}$  のつもりです。

(2) 17,18 行目

 $a_n$  の定義のしかたに従って,  $n = 1$  のときは別扱いにします。

(3) 26 行目

1E-13 は  $1 \times 10^{-13}$  を表します。たとえば, 123.456 は 1.23456E2, 12.3456E1, ..., 123456E-3 などと書くことができます。

## 6.3 自然数の逆数の和

自然数の逆数の和

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

は限りなく大きくなります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$$

問 6.2  $S_n$  が初めて 10 より大きくなる  $n$  を求めるためのプログラム SuuretsuNowa3 を作りなさい。

## 6.4 円周率

数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  を次のように定義します。

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}, & b_1 &= \frac{1}{3}, & c_1 &= 4(a_1 + b_1) \\ a_n &= -\frac{a_{n-1}}{4}, & b_n &= -\frac{b_{n-1}}{9}, & c_n &= \frac{4}{2n-1}(a_n + b_n) \end{aligned}$$

 $\{c_n\}$  の和

$$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

は円周率  $\pi$  に収束します。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pi$$

問 6.3  $\pi$  を小数部分 13 桁まで求めるために,  $|c_n| < 10^{-13}$  になるまで  $S_n$  を計算するプログラム SuuretsuNoWa4 を作りなさい。