2　論理式

命題は真偽が定まるような表現であるが，日本語で書いた文章には，内容があいまいだったり，読み方によって 2 通りの解釈ができたりするものがある。このような不都合をなくすために，論理記号を用いて表すことにする。

2.1　論理記号

定義 2.1 (論理記号)

分類	記号	読み方	
論理結合子	$\neg$	not	否定
logical connective	$\wedge$	and	かつ
	$\vee$	or	または
	$\to$	imply	ならば
	$\equiv$	if and only if	のときかつそのときに限り
量限定子	$\forall$	for all	すべての
quantifier	$\exists$	for some	ある
		there exists	

これらの論理記号を用いて単純な命題から複雑な命題が作られる。

定義 2.2 (合成命題)

名称	式	日本語の例
否定	$\neg P$	P でない
		P は成り立たない
論理積	$P \wedge Q$	P かつ Q
		P なのに Q
		P も Q も成り立つ
		P, Q 両方とも成り立つ
論理和	$P \vee Q$	P または Q
		P か Q
		P, Q どちらかが成り立つ
		P と Q 少なくとも一方が成り立つ
条件節	$P \to Q$	P ならば Q
		P のとき Q である
		P になるのは Q のときに限る
双条件節	$P \equiv Q$	P のとき，かつそのときに限り Q である
全称命題	$\forall x P(x)$	すべての x について $P(x)$ である
		任意の x について $P(x)$ である
		どんな x をとっても $P(x)$ になる
存称命題	$\exists x P(x)$	ある x について $P(x)$ である
		$P(x)$ となる x がある
		うまい x をとると $P(x)$ になる

複雑な命題では結合の順番を示すために括弧を使う。しかし，括弧が多くなると見にくいので，記号に優先順位をつけて一部の括弧を省略することがある。

定義 2.3 (結合優先順位)

優先順位	記号	同じ順位同士の場合
1	$\forall\ \exists\ \neg$	
2	$\wedge\ \vee$	左優先
3	$\rightarrow$	右優先
4	$\equiv$	左優先

例 2.1

$\forall x\, P(x) \rightarrow Q$	は	$(\forall x\, P(x)) \rightarrow Q$	の省略形
		$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q)$	の括弧は省略できない
$A \rightarrow \neg B \wedge C$	は	$A \rightarrow ((\neg B) \wedge C)$	の省略形
$A \vee B \vee C \vee D$	は	$((A \vee B) \vee C) \vee D$	の省略形
$A \vee B \wedge C \vee D$	は	$((A \vee B) \wedge C) \vee D$	の省略形（省略しないほうがよい）
$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$	は	$A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D))$	の省略形

例題 2.1 次の命題を論理式で書きなさい。ただし，“x が y の倍数である”という述語を $B(x, y)$ と書くことにする。

(a)　42 は 6 と 14 の公倍数である。

(b)　6 と 14 の公倍数はすべて 42 の倍数である。

(c)　42 は 6 と 14 の最小公倍数である。

解答 2.1

(a)　$B(42, 6) \wedge B(42, 14)$

(b)　$\forall x\,(B(x, 6) \wedge B(x, 14) \rightarrow B(x, 42))$

(c)　$(B(42, 6) \wedge B(42, 14)) \wedge \forall x\,(B(x, 6) \wedge B(x, 14) \rightarrow 42 \leqq x)$

問題 2.2 次の命題を論理式で書きなさい。ただし，次のように述語を定める。

$B(x, y)$　:　x が y の倍数である
$N(x)$　:　x は自然数である。

(a)　m は a と b の最小公倍数である。

(b)　d は a と b の最大公約数である。

(c)　a, b の最小公倍数と最大公約数の積は，a, b の積と等しい。

(d)　最小の自然数がある。

(e)　最大の自然数はない。

例題 2.3 次の論証に現れる命題を，述語を適当に定義して，論理式で書きなさい。その論理式を使って論証図を書きなさい。

(*a*) 歴代の首相は首相官邸に住んでいる。安倍晋三は首相官邸に住んでいる。したがって，安倍晋三は首相である。

(*b*) 有理数は整数の比，すなわち分母・分子が整数の分数，で表される。$\sqrt{2}$ は整数の比で表せない。ゆえに，$\sqrt{2}$ は有理数でない。しかし，明らかに $\sqrt{2}$ は実数である。したがって，有理数でない実数が存在する。

解答 2.2

(*a*) 次のように述語と定数を定める。

$$\begin{array}{lcl} P(x) & : & x \text{ は首相である} \\ L(x) & : & x \text{ は首相官邸にすむ} \\ a & : & \text{安倍晋三} \end{array}$$

論証図

$$\frac{\forall x\,(P(x)\to L(x)) \qquad\qquad L(a)}{P(a)}$$

推論の過程を細かく書くと，こうなる:

$$\frac{\dfrac{\forall x\,(P(x)\to L(x))}{P(a)\to L(a)} \qquad\qquad L(a)}{P(a)}$$

(*b*) 次のように述語を定める。

$$\begin{array}{lcl} R(x) & : & x \text{ は実数である} \\ Q(x) & : & x \text{ は有理数である} \\ I(x) & : & x \text{ は整数である} \end{array}$$

また，$H(x)$ を次の論理式の省略形とする。

$$\begin{array}{lcl} H(x) & : & x \text{ が整数の比で表せる} \\ & & \exists m\,\exists n\,(I(m)\,\wedge\, I(n)\,\wedge\, x=m/n) \end{array}$$

論証図

$$\frac{\dfrac{\forall x\,(Q(x)\to H(x)) \qquad\qquad \neg H\left(\sqrt{2}\right)}{\neg Q\left(\sqrt{2}\right)} \qquad\qquad R\left(\sqrt{2}\right)}{\exists x\,(\neg Q(x)\,\wedge\, R(x))}$$

推論の過程を細かく書くと，こうなる:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(Q(x)\to H(x))}{Q\left(\sqrt{2}\right)\to H\left(\sqrt{2}\right)} \qquad\qquad \neg H\left(\sqrt{2}\right)}{\neg Q\left(\sqrt{2}\right)} \qquad\qquad R\left(\sqrt{2}\right)}{\neg Q\left(\sqrt{2}\right)\,\wedge\, R\left(\sqrt{2}\right)}}{\exists x\,(\neg Q(x)\,\wedge\, R(x))}$$

問題 2.4 次の論証に現れる命題を，述語と定数を適当に定義して，論理式で書きなさい。その論理式を使って論証図を書きなさい。

(a) すべての人間がいつかは死ぬ。ソクラテスは人間である。ゆえに，ソクラテスはいつか死ぬ。

(b) 今日は土曜か日曜である。しかし日曜ではない。なぜなら，隣の高校の門が開いているが，いつも休日には門が閉まっているから。だから，今日は土曜である。（“日曜日は休日である”という暗黙の前提を追加しなさい。）

(c) 任意の自然数 n の平方（2 乗）は n 自身で割り切れる。ゆえに，任意の偶数の平方は偶数である。なぜなら上で述べたことから，それはある偶数で割り切れることがわかり，また偶数で割り切れる自然数は偶数である。

(d) 自然数は無限にある。もし有限だとすると，最大の自然数がある。任意の自然数を n とすると $n+1$ も自然数である。$n+1$ は n より大きいから，最大の自然数はない。ゆえに，自然数は無限にある。

2.2　解答

問題 2.2

(a)　$(B(m,a) \land B(m,b)) \land \forall x\,(B(x,a) \land B(x,b) \to m \leqq x)$

(b)　$(B(a,d) \land B(b,d)) \land \forall x\,(B(a,x) \land B(b,x) \to d \geqq x)$

(c)　$\forall y\,\forall z\,(M(a,b,y) \land D(a,b,z) \to m \times d = a \times b)$
ただし，$M(a,b,y)$ は (a) の論理式の m を y に書き換えたもので，$D(a,b,z)$ は (b) の論理式の d を z に書き換えたものである。

(d)　$\exists x\,(N(x) \land \forall y\,(N(y) \to x \leqq y))$

(e)　$\neg\,\exists x\,(N(x) \land \forall y\,(N(y) \to x \geqq y))$

問題 2.4

(a)　述語と定数

$M(x)$	:	x は人間である
$D(x)$	:	x はいつか死ぬ
s	:	ソクラテス

論証図

$$\frac{\forall x\,(M(x) \to D(x)) \qquad M(s)}{D(s)}$$

詳しい論証図

$$\frac{\dfrac{\forall x\,(M(x) \to D(x))}{M(s) \to D(s)} \qquad M(s)}{D(s)}$$

(b)　述語と定数

土 (x)	:	x は土曜である
日 (x)	:	x は日曜である
休 (x)	:	x は休日である
開 (x)	:	x には隣の高校の門が開いている
a	:	今日

論証図

$$\frac{\text{土}\,(a) \lor \text{日}\,(a) \qquad \dfrac{\text{開}\,(a) \qquad \forall x\,(\text{休}\,(x) \to \neg\,\text{開}\,(x)) \qquad \forall x\,(\text{日}\,(x) \to \text{休}\,(x))}{\neg\,\text{日}\,(a)}}{\text{土}\,(a)}$$

詳しい論証図

$$\frac{\text{土}\,(a) \lor \text{日}\,(a) \qquad \dfrac{\dfrac{\text{開}\,(a) \qquad \dfrac{\forall x\,(\text{休}\,(x) \to \neg\,\text{開}\,(x))}{\text{休}\,(a) \to \neg\,\text{開}\,(a)}}{\neg\,\text{休}\,(a)} \qquad \dfrac{\forall x\,(\text{日}\,(x) \to \text{休}\,(x))}{\text{日}\,(a) \to \text{休}\,(a)}}{\neg\,\text{日}\,(a)}}{\text{土}\,(a)}$$

(c)　述語

$B(x,y)$　:　x は y の倍数である（x は y で割り切れる）
$G(x)$　:　x は偶数である。

論証図

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\, B(x^2,x)}{\forall x\,(G(x)\to\exists z\,(G(z)\wedge B(x^2,z)))}\qquad \forall y\,(\exists z\,(G(z)\wedge B(y,z))\to G(y))}{\forall x\,(G(x)\to G(x^2))}$$

詳しい論証図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{G(e)\qquad \dfrac{\forall x\, B(x^2,x)}{B(e^2,e)}}{G(e)\wedge B(e^2,e)}}{\exists z\,(G(z)\wedge B(e^2,z))}\qquad \dfrac{\forall y\,(\exists z\,(G(x)\wedge B(y,z))\to G(y))}{\exists z\,(G(z)\wedge B(e^2,z))\to G(e^2)}}{G(e^2)}}{G(e)\to G(e^2)}\ [注]}{\forall x\,(G(x)\to G(x^2))}$$

[注]　$G(e^2)$ は $G(e)$ および他の 2 つの前提から導かれた結論で，$G(e)\to G(e^2)$ は他の 2 つの前提だけから導かれた結論である。すなわち，ここで，$G(e)$ が前提から除外される。

(d)　述語と定数

I　:　自然数は無限にある
$N(x)$　:　x は自然数である。

省略形

$M(x)$　:　x は最大の自然数である
$N(x)\wedge\forall y\,(N(y)\to x\geqq y)$

論証図

$$\dfrac{\neg I\to\exists x\, M(x)\qquad \dfrac{\forall x\,(N(x)\to N(x+1))\qquad \forall x\,(x<x+1)}{\neg\exists x\, M(x)}}{I}$$

$\neg\exists x\, M(x)$ を導く部分の詳しい論証図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{N(n)\qquad \dfrac{\forall x\,(N(x)\to N(x+1))}{N(n)\to N(n+1)}}{N(n+1)}\qquad \dfrac{\forall x\,(x<x+1)}{n<n+1}}{N(n+1)\wedge n<n+1}}{\exists y\,(N(y)\wedge n<y)}}{N(n)\to\exists y\,(N(y)\wedge n<y)}\ [注]\ N(n)\text{ を前提から除外}}{\forall x\,(N(x)\to\exists y\,(N(y)\wedge x<y))}}{\neg\exists x\,(N(x)\wedge\forall y\,(N(y)\to x\geqq y))}\quad \text{すなわち}\ \neg M(x)$$