3　命題論理

しばらくは，量限定子を含まない論理式の性質について考察していく。これを命題論理（sentencial logic，propositional calculus）という[*1)]。

複雑な命題が正しいことを証明するのに 2 つの方法がある。

(1) **意味論 (semantics)**
構成している基本命題の真偽から始めて順々に真偽を調べていって，目的の命題が正しい（常に真の値をとる）ことを示す。

(2) **構文論 (syntax)**
正しいとわかっている命題に公式を繰り返し適用して，目的の命題が正しいことを示す。公式を作るときに意味を考えるが，証明する（公式を適用する）ときには意味を考えずに，文字列として扱う。

まず，意味論による証明を考える。

3.1　真理値表

命題変数（あるいは基本命題）は 2 つの**真理値 (truth value, Boolean value)**，**真 (true)** または **偽 (false)** をとる。いくつかの命題変数を含む合成命題は，それらの命題変数がとる値の組み合わせによって，やはり 真 または 偽 の値をとる。それを表にして示したものを**真理値表** (truth table) と言う。

論理結合子を 1 つだけもつ命題の真理値表（真 を O, 偽 を X とした)。

変数	否定
A	$\neg A$
O	X
X	O

変数	変数	論理積	論理和	条件節	双条件節
A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \equiv B$
O	O	O	O	O	O
O	X	X	O	X	X
X	O	X	O	O	X
X	X	X	X	O	O

例題 3.1 次の命題の真理値表を書きなさい。

(1)　$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
(2)　$(A \to B) \wedge (\neg A \to C)$

解答 3.1

(1)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
O	O	O	X	X	X	X	O
O	X	X	O	X	O	O	O
X	O	X	O	O	X	O	O
X	X	X	O	O	O	O	O

[*1)] 量限定子を含めた論理式も考察するのは，述語論理 (predicate logic) という。

次のような簡易真理値表が便利である。

A	B	$\neg\,(A$	$\wedge\ B)$	$\equiv$	$\neg\,A$	$\vee$	$\neg\,B$
O	O	X	O	O	X	X	X
O	X	O	X	O	X	O	O
X	O	O	X	O	O	O	X
X	X	O	X	O	O	O	O
				↑			
		②	①	⑥	③	⑤	④

← 値を計算した順番

解答 3.2

(2)

A	B	C	$(A \to B)$	$\wedge$	$(\neg\,A$	$\to C)$
O	O	O	O	O	X	O
O	O	X	O	O	X	O
O	X	O	X	X	X	O
O	X	X	X	X	X	O
X	O	O	O	O	O	O
X	O	X	O	X	O	X
X	X	O	O	O	O	O
X	X	X	O	X	O	X
				↑		

3.2　トートロジーと矛盾命題

例題 3.1(1) の命題は，命題変数にどんな真理値を代入しても常に真になる。このような命題を**トートロジー (tautology)** または**恒真命題**と言う。逆に，常に偽であるような命題を **矛盾命題 (contradiction)** と言う。

問題 3.2 次の命題がトートロジーであることを示しなさい。

$A \vee \neg\,A$　排中律
$A \to A$

問題 3.3 次の命題が矛盾命題であることを示しなさい。

$A \wedge \neg\,A$　矛盾律
$A \equiv \neg\,A$

3.3　導出と同値

命題 P の値を真にするようなどんな代入についても命題 Q の値が真になるとき，“P は Q を**導出する** (deduce)” あるいは “P から Q が導かれる” と言い，次のように書く。

$$\text{導出する}\qquad P \ \Rightarrow\ Q$$

また，どんな代入についても P と Q の値が一致するとき，“P と Q は**同値である** (equivalent)” と言い，次のように書く。

$$\text{同値である}\quad P\ \Leftrightarrow\ Q$$

定理 3.1

(a)　P が Q を導出するのは，$P \to Q$ がトートロジーのときかつそのときに限る。

(b)　P が Q と同値になるのは，$P \equiv Q$ がトートロジーのときかつそのときに限る。

例題 3.4 (三段論法)　$(A \to B) \wedge (B \to C)\ \Rightarrow\ (A \to C)$ [*2)]

解答 3.3

A	B	C	$(A \to B)$	$\wedge$	$(B \to C)$	$\to$	$(A \to C)$
O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	X	O	X	X	O	X
O	X	O	X	X	O	O	O
O	X	X	X	X	O	O	X
X	O	O	O	O	O	O	O
X	O	X	O	X	X	O	O
X	X	O	O	O	O	O	O
X	X	X	O	O	O	O	O
						↑	

問題 3.5 (modus ponens，十分条件の適用)

$$(A \to B) \wedge A\ \Rightarrow\ B$$

問題 3.6 (modus tollens，必要条件の適用)

$$(A \to B) \wedge \neg B\ \Rightarrow\ \neg A$$

問題 3.7 (二重否定の法則)

$$\neg\neg A\ \Leftrightarrow\ A$$

問題 3.8 (交換法則)

$$A \wedge B\ \Leftrightarrow\ B \wedge A$$
$$A \vee B\ \Leftrightarrow\ B \vee A$$
$$A \equiv B\ \Leftrightarrow\ B \equiv A$$

[*2)] 以後，単に $P\ \Rightarrow\ Q$ あるいは $P\ \Leftrightarrow\ Q$ と書いて，“それを示しなさい” のこととする。

問題 3.9 (結合法則)

$$(A \wedge B) \wedge C \;\Leftrightarrow\; A \wedge (B \wedge C)$$
$$(A \vee B) \vee C \;\Leftrightarrow\; A \vee (B \vee C)$$
$$(A \equiv B) \equiv C \;\Leftrightarrow\; A \equiv (B \equiv C)$$

問題 3.10 (冪等(べきとう)法則)

$$A \wedge A \;\Leftrightarrow\; A$$
$$A \vee A \;\Leftrightarrow\; A$$

問題 3.11 (ド・モルガンの法則)

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; \neg A \wedge \neg B$$

問題 3.12 (分配法則)

$$A \wedge (B \vee C) \;\Leftrightarrow\; (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \;\Leftrightarrow\; (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

問題 3.13 (吸収法則)

$$(A \wedge B) \vee B \;\Leftrightarrow\; B$$
$$(A \vee B) \wedge B \;\Leftrightarrow\; B$$
$$(A \wedge B) \vee \neg B \;\Leftrightarrow\; A \vee \neg B$$
$$(A \vee B) \wedge \neg B \;\Leftrightarrow\; A \wedge \neg B$$
$$\boldsymbol{T} \wedge A \;\Leftrightarrow\; A$$
$$\boldsymbol{F} \vee A \;\Leftrightarrow\; A$$
$$\boldsymbol{T} \vee A \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{T}$$
$$\boldsymbol{F} \wedge A \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{F}$$

ただし，$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{F}$はそれぞれ任意のトートロジー，矛盾命題とする。

問題 3.14 (対偶の法則)

$$A \to B \;\Leftrightarrow\; \neg B \to \neg A$$

問題 3.15

$$A \equiv B \;\Leftrightarrow\; (A \to B) \wedge (B \to A)$$

問題 3.16

$$A \to B \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee B$$
$$\neg(A \to B) \;\Leftrightarrow\; A \wedge \neg B$$

問題 3.17

$$A \equiv B \;\Leftrightarrow\; (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$
$$\neg(A \equiv B) \;\Leftrightarrow\; (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$