3.4　積和標準形

定義 3.1 (積和標準形)

命題変数および命題変数の否定を**リテラル** (literal)[*1] という。
リテラルおよび任意個のリテラルの論理積を**基本積** (fundamental conjunction) という。ただし，変数が同じリテラルを含まないものとする。
基本積および任意個の基本積の論理和を**積和標準形** (disjunctive normal form) という。

例 3.1

リテラルの例	$A,\ \neg B$
基本積の例	$A,\ A \wedge \neg B \wedge \neg C$
基本積でない例	$A \wedge A \wedge B,\ A \wedge \neg A$
積和標準形の例	$(A \wedge \neg B) \vee C \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C),\ A \vee \neg A$

真理値表の 1 行だけが O となるような命題は基本積で表すことができる。

例 3.2

A	B	C	(1)	(2)	
O	O	O	X	X	
O	O	X	X	X	
O	X	O	O	X	(1)　$A \wedge \neg B \wedge C$
O	X	X	X	X	
X	O	O	X	X	
X	O	X	X	O	(2)　$\neg A \wedge B \wedge \neg C$
X	X	O	X	X	
X	X	X	X	X	

真理値表の数行が O となる命題は，その各行に対応する基本積を $\vee$ で結んだ積和標準形で表すことができる。

例 3.3 例題 3.1(2) で，命題 $(A \to B) \wedge (\neg A \to C)$ の真理値表を書いた。その表から次の積和標準形が得られる。

$$\begin{aligned}&(A \to B) \wedge (\neg A \to C) \iff \\ &\quad (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)\end{aligned}$$

こうして得られた積和標準形は，どの基本積も元の命題にあった命題変数をすべて含んでいる。このような積和標準形を**完全積和標準形 (complete disjunctive normal form)** と言う。

注 3.1 この命題はもっと単純な (完全ではない) 積和標準形とも同値である。

$$(A \to B) \wedge (\neg A \to C) \iff (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$$

[*1] “文字みたいのもの” という意味。

3.5　同値変形

定理 3.1 (置換定理) 命題 P の部分命題 U を U と同値な命題 V で書き換えて得られる命題 Q は P と同値である。

例 3.4

$$A \to B \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee B \qquad \text{だから} \qquad \underbrace{A \wedge \overbrace{(A \to B)}^{U}}_{P} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{A \wedge \overbrace{(\neg A \vee B)}^{V}}_{Q}$$

結合法則，交換法則，冪等法則と吸収法則を適用することにより次の定理が成り立つ。

定理 3.2 (1)　$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ において，$P_i \Rightarrow P_k$ であるようなペアがあったら，P_k の方は冗長である。冗長なものを除去して，任意に並べ替えて得られる $P_{i_1} \wedge P_{i_2} \wedge \cdots \wedge P_{i_m}$ はもとの命題と同値である。

(2)　$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$ において，$P_i \Rightarrow P_k$ であるようなペアがあったら，P_i の方は冗長である。冗長なものを除去して，任意に並べ替えて得られる $P_{i_1} \vee P_{i_2} \vee \cdots \vee P_{i_m}$ はもとの命題と同値である。

問題 3.16 と 3.17 より，すべての命題が，それと同値で $\to$ と $\equiv$ を含まない命題に変換できる。さらに，二重否定の法則，ド・モルガンの法則を使って，$\neg$ が変数の前にしかないようにできる。そして，分配法則と定理 3.2 を使うと，積和標準形にすることができる。

例題 3.18 $\neg\,((A \to B) \equiv (\neg A \to \neg B))$ の積和標準形を求めなさい。

解答 3.1

$$\begin{array}{lll}
 & \neg\,((A \to B) \equiv (\neg A \to \neg B)) & \\
\Leftrightarrow & \neg\,((\neg A \vee B) \equiv (\neg\neg A \vee \neg B)) & (\text{問題 } 3.16) \\
\Leftrightarrow & \neg\,((\neg A \vee B) \equiv (A \vee \neg B)) & (\text{二重否定の法則}) \\
\Leftrightarrow & ((\neg A \vee B) \wedge \neg(A \vee \neg B)) \vee (\neg(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) & (\text{問題 } 3.17) \\
\Leftrightarrow & ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \wedge B)) \vee ((A \wedge \neg B) \wedge (A \vee \neg B)) & (\text{ド・モルガンの法則,} \\
 & & \ \text{二重否定の法則}) \\
\Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg A \wedge B) \vee (B \wedge \neg A \wedge B) \vee & \\
 & (A \wedge \neg B \wedge A) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg B) & (\text{交換法則, 分配法則}) \\
\Leftrightarrow & (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \wedge (A \wedge \neg B) & (\text{定理 } 3.2(1)) \\
\Leftrightarrow & (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) & (\text{定理 } 3.2(2))
\end{array}$$

問題 3.19 次の命題を積和標準形に変形しなさい。（定理 3.2 が適用できるときは，早く適用すると楽である。）

(1)　$(A \to B) \wedge (\neg A \to B)$

(2)　$\neg\,\big((A \to C) \wedge (B \to D) \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge D)\big)$

(3)　$\neg\,\big((A \to C) \wedge (B \to D) \to (C \to A) \wedge (D \to B)\big)$

3.6　数学の証明において

例 3.5 次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} x^2+y^2=50 & \cdots ① \\ (x+2)^2+(y-1)^2=45 & \cdots ② \end{cases}$$

解答 3.2

①－②より

$$-4x-4+2y-1=5$$

$\therefore$　$y=2x+5 \quad \cdots ③$

③を①に代入

$$x^2+(2x+5)^2=50$$
$$5x^2+20x+25=50$$
$$x^2+4x-5=0$$
$$(x+5)(x-1)=0$$

$\therefore$　$x=-5$ または $x=1$

(ア)　$x=-5$ のとき

③より　$y=-5$

(イ)　$x=1$ のとき

③より　$y=7$

したがって

$$\begin{cases} x=-5 \\ y=-5 \end{cases} \text{または} \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases} \qquad \cdots\cdots[\text{答}]$$

問題 3.20 (ア),(イ) で場合分けして，y の値を求めた部分を，論理式で表すと

$$(x=-5 \to y=-5) \wedge (x=1 \to y=7)$$

まとめて書いた答を，論理式で表すと

$$(x=-5 \wedge y=-5) \vee (x=1 \wedge y=7)$$

一方は，$(A \to C) \wedge (B \to D)$，他方は $(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$ である。
この解答でいいのだろうか？

例 3.6 $a \leqq x \leqq a+2$ における $f(x) = x^2 - 2x$ の最大値 M_a を求めなさい。

解答 3.3

$y = f(x) = (x-1)^2 - 1$ だから，頂点が $(1, -1)$ の放物線である。

（ア）　区間の左端 $x = a$ で最大となる場合
　　$f(a) \geqq f(a+2)$
　　$a^2 - 2a \geqq (a+2)^2 - 2(a+2)$
$\therefore$　$a \leqq 0$
（イ）　区間の右端 $x = a+2$ で最大となる場合
　　$f(a) \leqq f(a+2)$
$\therefore$　$a \geqq 0$

答

（ア）　$a \leqq 0$ のとき
　　$M_a = f(a) = a^2 - 2a$
（イ）　$a \geqq 0$ のとき
　　$M_a = f(a+2) = a^2 + 2a$

問題 3.21 説明は

$$(f(a) \text{ が最大} \rightarrow a \leqq 0) \land (f(a+2) \text{ が最大} \rightarrow a \geqq 0)$$

解答は

$$(a \leqq 0 \rightarrow f(a) \text{ が最大}) \land (a \geqq 0 \rightarrow f(a+2) \text{ が最大})$$

一方は，$(A \rightarrow C) \land (B \rightarrow D)$，他方は $(C \rightarrow A) \land (D \rightarrow B)$ である。
この解答でいいのだろうか。

3.7　解答

問題 3.19

(1)

$$
\begin{aligned}
&(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad (\neg A \vee B) \wedge (A \vee B) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad (\neg A \wedge A) \vee B \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad B
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\neg \big((A \to C) \wedge (B \to D) \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge D)\big) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad \big(\neg ((A \to C) \wedge (B \to D)) \wedge ((A \wedge C) \vee (B \wedge D))\big) \\
&\qquad\qquad\qquad \vee \big(((A \to C) \wedge (B \to D)) \wedge \neg ((A \wedge C) \vee (B \wedge D))\big) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad \big((\neg (A \to C) \vee \neg (B \to D)) \wedge ((A \wedge C) \vee (B \wedge D))\big) \\
&\qquad\qquad\qquad \vee \big((A \to C) \wedge (B \to D) \wedge (\neg (A \wedge C) \wedge \neg (B \wedge D))\big) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad \big(((A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg D)) \wedge ((A \wedge C) \vee (B \wedge D))\big) \\
&\qquad\qquad\qquad \vee \big((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg D)\big) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad ((A \wedge \neg C \wedge A \wedge C) \vee (A \wedge \neg C \wedge B \wedge D) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad (B \wedge \neg D \wedge A \wedge C) \vee (B \wedge \neg D \wedge B \wedge D)) \\
&\qquad\qquad\qquad \vee ((\neg A \vee (C \wedge \neg C)) \wedge (\neg B \vee (D \wedge \neg D))) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad (A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\neg \big((A \to C) \wedge (B \to D) \to (C \to A) \wedge (D \to B)\big) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad (A \to C) \wedge (B \to D) \wedge \neg ((C \to A) \wedge (D \to B)) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad (A \to C) \wedge (B \to D) \wedge (\neg (C \to A) \vee \neg (D \to B)) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge ((C \wedge \neg A) \vee (D \wedge \neg B)) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad ((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (C \wedge \neg A)) \\
&\qquad\qquad\qquad \vee ((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (D \wedge \neg B)) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad \neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D
\end{aligned}
$$