4　積和標準形の最小化

積和標準形においては，否定 $\neg A$ を $\overline{A}$，基本積 $L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n$ を $L_1L_2\cdots L_n$ と書くことにする。

例 4.1

$$\begin{array}{lcl}
(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C \wedge \neg D) & \Longleftrightarrow & A\overline{B}\,\overline{C} \ \vee \ \overline{B}C\overline{D} \\
(\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge C \wedge D) \vee A & \Longleftrightarrow & \overline{A}B \vee \overline{B}CD \vee A \\
\neg A \vee (B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg D) & \Longleftrightarrow & \overline{A} \vee BC \vee \overline{B}\,\overline{D}
\end{array}$$

4.1　最小積和標準形

積和標準形 ϕ に現れているリテラルの個数を $\ell(\phi)$，基本積の個数を $c(\phi)$ で表すことにする。

定義 4.1 (単純) 2 つの積和標準形 ϕ と ψ について，

$$\ell(\phi) \leqq \ell(\psi) \quad \text{かつ} \quad c(\phi) \leqq c(\psi) \quad \text{かつ} \quad \text{少なくとも一方は本当に小さい}$$

であるとき，ϕ は ψ より**単純** (simple) であるという。

例 4.2 例 4.1 の積和標準形について

$$\begin{array}{ll}
\phi_1 : A\overline{B}\,\overline{C} \ \vee \ \overline{B}C\overline{D} & \ell(\phi_1) = 6,\ c(\phi_1) = 2 \\
\phi_2 : \overline{A}B \vee \overline{B}CD \vee A & \ell(\phi_2) = 6,\ c(\phi_2) = 3 \\
\phi_3 : \overline{A} \vee BC \vee \overline{B}\,\overline{D} & \ell(\phi_3) = 5,\ c(\phi_3) = 3
\end{array}$$

ゆえに

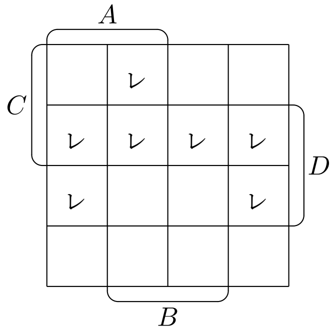
ϕ_1はϕ_2より単純である
ϕ_3はϕ_2より単純である
ϕ_1とϕ_3はどちらが単純ということはない

定義 4.2 (最小積和標準形) 命題 P と同値な積和標準形で，それより単純で P と同値な積和標準形がないようなものを，P の**最小積和標準形** (minimal disjunctive normal form) という。

4.2　カルノー図を用いる最小化

与えられた積和標準形と同値な最小積和標準形を求めるアルゴリズムがいろいろ考案されている。変数が 6 個以下のときは，**カルノー図** (Karnaugh map) を用いるのが便利である。

4 変数のカルノー図は，下のような図である。



この図は,

$$AB C\overline{D} \vee A\overline{B}CD \vee ABCD \vee \overline{A}BCD \vee \overline{A}\,\overline{B}CD \vee A\overline{B}\,\overline{C}D \vee \overline{A}B\overline{C}D$$

を表している。

1 つのマスが 4 つのリテラルを含む基本積に対応していて，完全積和標準形に現れる基本積に対応するマスに レ が書いてある。

面積が 2 の長方形は 3 つのリテラルからなる基本積に対応する。2 列目に レ が書かれた面積 2 の長方形がある。これは

$$ABC\overline{D} \vee ABCD \quad \text{すなわち} \quad ABC$$

を表している。

面積が 4 の長方形は 2 つのリテラルからなる基本積に対応する。2 行目には レ が書かれた面積 4 の長方形がある。これは

$$A\overline{B}CD \vee ABCD \vee \overline{A}BCD \vee \overline{A}\,\overline{B}CD \quad \text{すなわち} \quad CD$$

を表している。

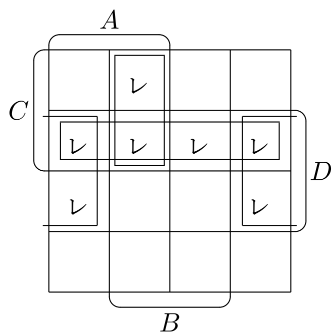
右端と左端はつながっていると考える。したがって，2,3 行目と 4,1 列目に 2×2 の長方形 (正方形) がある。これは

$$\overline{A}\,\overline{B}CD \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D \vee A\overline{B}CD \vee A\overline{B}\,\overline{C}D \quad \text{すなわち} \quad \overline{B}D$$

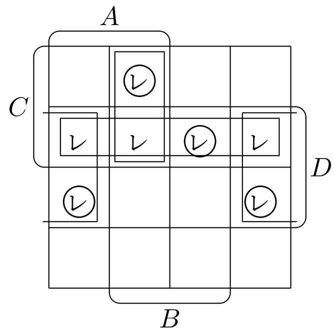
を表している。

もちろん，面積 4 の長方形には，面積 2 の長方形が (4 つ) 含まれているが，なるべく大きな長方形にした方が単純になる。

ステップ 1　レ が書かれている面積 4 の長方形があったら，それを囲む。次に，レ が書かれている面積 2 の長方形で，すでに囲まれた長方形に完全に含まれてはいないものがあったら，それを囲む。孤立した レ が書かれているマスがあったらそれを囲む。



ステップ 2　レが書かれたマスで，それを囲む長方形が 1 つしかないものがあったら，そのマスをマークする。それを囲んでいる長方形は必要な長方形である。

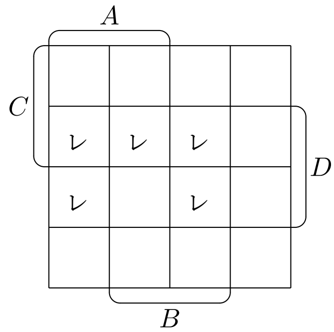


この例では，すべての長方形が必要である。すなわち，最小積和標準形はすべての長方形に対応する基本積を ∨ で結んだものである。

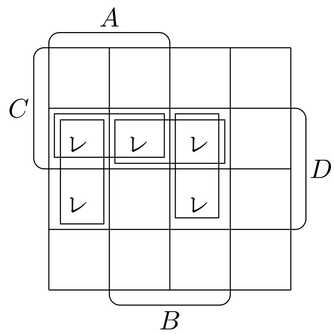
最小積和標準形は　$CD \vee \overline{B}\,D \vee ABC$

例 4.3 いつもすべての長方形が必要とは限らない。

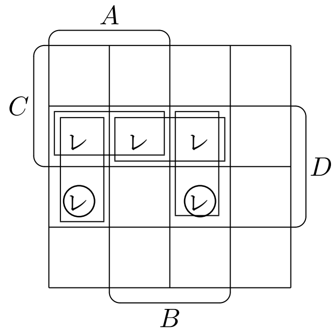
$A\overline{B}\,D \vee ABCD \vee \overline{A}\,BD$ を考える。



ステップ 1



ステップ 2



縦長の 2 つの長方形は，マークしたマスを含んでいるから必要である。この 2 つの長方形だけでは，すべての レ を覆わないので不十分である。

ステップ 3

$ABCD$ のマスを含む長方形が 2 つあるが，面積が等しいのでどちらを選んでもよい。

最小積和標準形は　$A\overline{B}D \vee \overline{A}BD \vee ACD$　および　$A\overline{B}D \vee \overline{A}BD \vee BCD$

問題 4.1 次の 積和標準形の 最小積和標準形を求めなさい。

(1)　$AB \vee \overline{A}C \vee BC$

(2)　$BC \vee AB\overline{C}D \vee \overline{A}\,\overline{B}CD \vee A\overline{B}C\overline{D} \vee \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$