

6 中間試験

問題

- (1) 次の論理式がトートロジーかどうか調べなさい。トートロジーでないものは、それと同値な積和標準形を求めなさい(解答は裏に書いてください)。

(a) $((A \vee B) \rightarrow C) \equiv ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$

(b) $((A \vee B) \rightarrow C) \equiv ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$

(c) $((A \wedge B) \rightarrow C) \equiv ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$

(d) $((A \wedge B) \rightarrow C) \equiv ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$

- (2) 次の述語を用いて、下の文章を論理式に書き換えなさい。

$$P(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ が素数である}$$

$$E(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ が偶数である}$$

$$x > y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ は } y \text{ より大きい}$$

$$x = y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ と } y \text{ は等しい}$$

- (a) どんな素数にも、それより大きい素数がある。
(b) 2 より大きい素数は奇数である。
(c) 偶数の素数は 2 つはない。
- (3) 次の論理式と同値な最小積和標準形を求めなさい。

$$\bar{A}\bar{B} \vee A\bar{B}D \vee B\bar{C}\bar{D} \vee AC\bar{D}$$

6.1 解答

(1) 解答 6.1

次のように, P, Q, R, S を定める。(a),(b),(c),(d) はこうなる。

$$\begin{aligned} P &\Leftrightarrow (A \vee B) \rightarrow C & (a) &\Leftrightarrow P \equiv R \\ Q &\Leftrightarrow (A \wedge B) \rightarrow C & (b) &\Leftrightarrow Q \equiv R \\ R &\Leftrightarrow (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C) & (c) &\Leftrightarrow P \equiv S \\ S &\Leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) & (d) &\Leftrightarrow Q \equiv S \end{aligned}$$

semantics による答

A	B	C	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow C$	$B \rightarrow C$	P	Q	R	S	(a)	(b)	(c)	(d)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	X	0	0	X	X	X	X	X	X	0	0	0	0
0	X	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	X	X	0	X	X	0	X	0	0	X	X	0	0	X
X	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X	0	X	0	X	0	X	X	0	0	X	X	0	0	X
X	X	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X	X	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

したがって

(b), (c) トートロジーである

(a), (d) トートロジーでない

積和形の例: $ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}BC \vee \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

syntax による答

$$\begin{aligned} P &\Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee C && \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C \\ Q &\Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C && \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C \\ R &\Leftrightarrow (\neg A \vee C) \vee (\neg B \vee C) && \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C && \Leftrightarrow Q \\ S &\Leftrightarrow (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) && \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C && \Leftrightarrow P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \equiv R &\Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg R) \\ &\Leftrightarrow \{(\neg A \wedge \neg B) \vee C\} \wedge [\neg A \vee \neg B \vee C] \\ &\quad \vee \{[(A \vee B) \wedge \neg C] \wedge [A \wedge B \wedge \neg C]\} \\ &\Leftrightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \vee C] \vee [A \wedge B \wedge \neg C] \\ &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \\ &\Leftrightarrow \bar{A}\bar{B} \vee C \vee AB\bar{C} \\ &\Leftrightarrow AB \vee \bar{A}\bar{B} \vee C \end{aligned}$$

(2) 次の述語を用いて，下の文章を論理式に書き換えなさい。

- $P(x) \Leftrightarrow x$ が素数である
- $E(x) \Leftrightarrow x$ が偶数である
- $x > y \Leftrightarrow x$ は y より大きい
- $x = y \Leftrightarrow x$ と y は等しい

解答 6.2

(a) どんな素数にも，それより大きい素数がある。

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (P(y) \wedge y > x))$$

(b) 2 より大きい素数は奇数である。

$$\forall x (P(x) \wedge x > 2 \rightarrow \neg E(x))$$

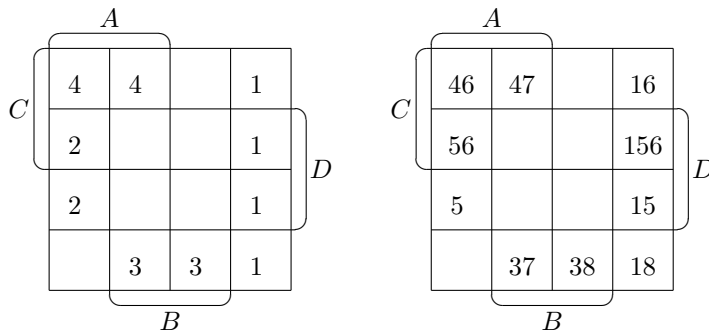
(c) 偶数の素数は 2 つはない。

$$\neg \exists x \exists y (E(x) \wedge P(x) \wedge E(y) \wedge P(y) \wedge \neg x = y)$$

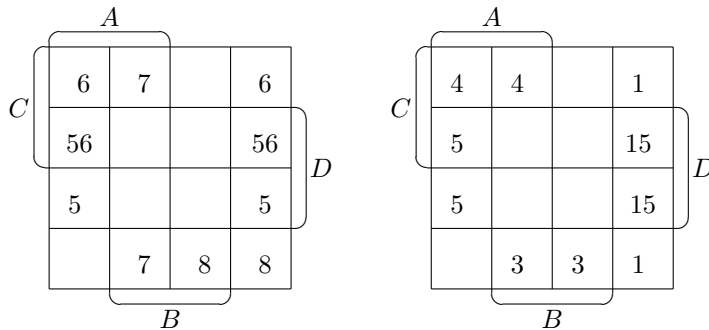
(3) 次の論理式と同値な最小積和標準形を求めなさい。

解答 6.3

$$\overline{A} \overline{B}^1 \vee A \overline{B} D^2 \vee B \overline{C} \overline{D}^3 \vee A C \overline{D}^4$$



5 が必要で，残りをカバーする選び方が 2 通りある。



$$\overline{B} D^5 \vee \overline{B} C^6 \vee A B \overline{D}^7 \vee \overline{A} \overline{C} \overline{D}^8$$

$$\overline{A} \overline{B}^1 \vee \overline{B} D^5 \vee B \overline{C} \overline{D}^3 \vee A C \overline{D}^4$$