

## 7 自然演繹体系

この節では、正しい命題を構文的に証明する形式的体系について論ずる。そのような形式的体系はいくつか考案されているが、ここでは Gentzen が考案した自然演繹体系を紹介する。

### 7.1 証明の例

例 7.1 ( $\wedge$  の結合法則)  $(P \wedge Q) \wedge R \Rightarrow P \wedge (Q \wedge R)$   
すなわち、前提  $(P \wedge Q) \wedge R$  から結論  $P \wedge (Q \wedge R)$  を導く。

(1) 直線的に並べて書いた証明

- ①  $(P \wedge Q) \wedge R$  [前提]
- ②  $P \wedge Q$  [①より]
- ③  $P$  [②より]
- ④  $Q$  [②より]
- ⑤  $R$  [①より]
- ⑥  $Q \wedge R$  [④,⑤より]
- ⑦  $P \wedge (Q \wedge R)$  [③,⑥より]

新しく導かれた命題が、上のどの命題から直接導かれたのかがわかるように [ ] 内に、元の命題の番号が書いてある。

(2) 平面的に書いた証明

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & \text{前提} & \\
 \text{前提} & \frac{(P \wedge Q) \wedge R}{P \wedge Q} & \text{前提} \\
 \frac{(P \wedge Q) \wedge R}{P \wedge Q} & \frac{P \wedge Q}{Q} & \frac{(P \wedge Q) \wedge R}{R} \\
 \hline
 P & Q \wedge R & \\
 \hline
 P \wedge (Q \wedge R) & & 
 \end{array}
 \end{array}$$

このように書くと、どの命題から直接導かれたのかが、一目瞭然にわかる。

一番上に書かれている命題が前提で、一番下に書かれている命題が結論である。

例 7.2 ( $\rightarrow$  の性質)  $P \rightarrow Q \Rightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$

否定命題  $\neg X$  を証明するには背理法を用いる。すなわち、 $X$  を仮定して矛盾を導く。

(1) 直線的に書いた証明

- ①  $P \rightarrow Q$  [前提]
- ②  $P \wedge \neg Q$  [仮定]
- ③  $P$  [②より]
- ④  $Q$  [③,①より]
- ⑤  $\neg Q$  [②より]
- ⑥  $\perp$  (矛盾) [④,⑤より]
- ⑦  $\neg(P \wedge \neg Q)$  [②,⑥より] (\*)②の“仮定”が解消する

(2) 平面的に書いた証明

$$\begin{array}{c}
 \text{仮定 (*)} \\
 \frac{P \wedge \neg Q}{P} \quad \text{前提} \quad \frac{P \wedge \neg Q}{\neg Q} \\
 \frac{P \rightarrow Q}{Q} \quad \frac{P \wedge \neg Q}{\neg Q} \\
 \frac{\perp}{\neg(P \wedge \neg Q)} \quad (*)
 \end{array}$$

矛盾  $\perp$  を導いた時点では、矛盾を引き起こした原因の  $P \wedge \neg Q$  も前提として用いられているが、その否定  $\neg(P \wedge \neg Q)$  を導いた時点で前提から除外される。このように、最終的に除外される前提を仮定という。

## 7.2 命題論理の自然演繹体系

平面的な証明図で、横線の上の中間前提から下の中間結論を導くステップを推論という。この推論を厳密に規定しておかないと、誤った証明がなされてしまう。それを防ぐために、下に述べる推論規則だけを認めることにする。

### 7.2.1 推論規則

論理演算子それぞれについての導入規則（横線の下に演算子を含む命題がある）と除去規則（横線の上に演算子を含む命題がある）、および矛盾に関する特別規則がある。（\*）印がついているのは、それによって仮定の一部が除外される規則である。

<p>[<math>\wedge</math> 導入]</p> $\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$	<p>[<math>\wedge</math> 除去]</p> $\frac{P \wedge Q}{P} \quad \frac{P \wedge Q}{Q}$
<p>[<math>\vee</math> 導入]</p> $\frac{P}{P \vee Q} \quad \frac{Q}{P \vee Q}$	<p>[<math>\vee</math> 除去]</p> $\frac{P \vee Q \quad \begin{array}{c} \text{仮定 (*)} \\ P \\ \vdots \\ R \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{仮定 (*)} \\ Q \\ \vdots \\ R \end{array}}{R} \quad (*)$

[ $\rightarrow$  導入]

$$\frac{\begin{array}{c} \text{仮定 (*)} \\ P \\ \vdots \\ Q \end{array}}{P \rightarrow Q} \quad (*)$$

[ $\rightarrow$  除去]

$$\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q}$$

[ $\neg$  導入]

$$\frac{\begin{array}{c} \text{仮定 (*)} \\ P \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg P} \quad (*)$$

[ $\neg$  除去]

$$\frac{P \quad \neg P}{\perp}$$

[矛盾規則]

$$\frac{\perp}{P}$$

### 7.3 例と問題

例 7.3 (ドモルガンの法則)  $\neg P \vee \neg Q \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$

証明

$$\frac{\begin{array}{c} \text{前提} \\ \neg P \vee \neg Q \end{array} \quad \frac{\frac{\text{仮定 (*2)} \quad P \wedge Q}{P} \quad \frac{\text{仮定 (*1)} \quad \neg P}{\neg P}}{\perp} \quad \frac{\frac{\text{仮定 (*2)} \quad P \wedge Q}{Q} \quad \frac{\text{仮定 (*1)} \quad \neg Q}{\neg Q}}{\perp}}{\frac{\perp}{\neg(P \wedge Q)} \quad (*)}$$

問題 7.1 (三段論法)  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$

問題 7.2 ( $\rightarrow$  の性質)  $\neg P \vee Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

問題 7.3 (分配法則)  $(P \wedge Q) \vee R \Rightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$