

7.4 直観論理と古典論理

前回紹介した演繹体系では、問題 7.2(\rightarrow の性質) の逆 “ $P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P \vee Q$ ” が証明できない。もっと単純な “ $\Rightarrow A \vee \neg A$ ” も証明できない。この演繹体系は、直観論理 (intuitionistic logic) と言って、何もかも真と偽どちらかになるとは考えない、どっちつかずの中庸もありうると考える 論理である。ゆえに中庸を排除する排中律 “ $P \vee \neg P$ ” を無条件に認めることはしない。“ P ” あるいは “ $\neg P$ ” が証明できたときに初めて “ $P \vee \neg P$ ” を認める考えである。

一方古典論理 (classical logic) は、必ず真か偽かどちらかであるとする 論理である。直観論理の体系を古典論理に拡張する方法が 2 通りある。

7.4.1 古典論理の自然演繹体系 1

直観論理の体系に、排中律を公理 (axiom) として追加する。すなわち、前提の他に $P \vee \neg P$ の形の命題を証明なしで使ってよいことにする。

例 7.4 (\rightarrow の性質) $P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P \vee Q$

証明

$$\frac{\begin{array}{c} \text{公理} \\ P \vee \neg P \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \text{仮定 (*1)} \\ P \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \text{前提} \\ P \rightarrow Q \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \text{仮定 (*1)} \\ \neg P \end{array}}{\neg P \vee Q}}{Q} \quad \frac{\quad}{\neg P \vee Q}}{\neg P \vee Q} \quad (*1)$$

例 7.5 (二重否定の原理) $\neg \neg P \Rightarrow P$

証明

$$\frac{\begin{array}{c} \text{公理} \\ P \vee \neg P \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \text{仮定 (*1)} \\ P \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \text{仮定 (*1)} \\ \neg P \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \text{前提} \\ \neg \neg P \end{array}}{\perp}}{P}}{P}}{P} \quad (*1)$$

古典論理では中庸がないので、“ P でないことはない” は “ P である” と同じことを意味する。

7.4.2 古典論理の自然演繹体系 2

排中律の公理のかわりに、次の二重否定の規則を推論規則 (inference rule) として追加する。

$$\frac{\neg \neg P}{P}$$

例 7.6 (排中律) $P \vee \neg P$

証明

$$\frac{\frac{\frac{\text{仮定 (*1)}}{P}}{P \vee \neg P} \quad \frac{\text{仮定 (*2)}}{\neg(P \vee \neg P)}}{\perp} \quad \frac{\frac{\frac{\perp}{\neg P}}{P \vee \neg P} \text{ (*1)} \quad \text{仮定 (*2)}}{\neg(P \vee \neg P)}}{\perp} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg\neg(P \vee \neg P)} \text{ (*2)}}{P \vee \neg P}$$

例 7.7 (ドモルガンの法則) $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$

証明

$$\frac{\frac{\frac{\text{仮定 (*1)}}{P}}{P \wedge Q} \quad \frac{\text{仮定 (*2)}}{Q}}{\perp} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg P} \text{ (*1)} \quad \text{前提}}{\neg(P \wedge Q)} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg P \vee \neg Q} \text{ (*1)} \quad \text{仮定 (*3)}}{\neg(\neg P \vee \neg Q)} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg Q} \text{ (*2)} \quad \text{仮定 (*3)}}{\neg(\neg P \vee \neg Q)} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)} \text{ (*3)}}{\neg P \vee \neg Q}$$

問題 7.4

- (1) $P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P \vee Q$ を体系 2 で証明しなさい。
- (2) $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$ を体系 1 で証明しなさい。

問題 7.5 次の法則, 性質を証明しなさい。“ $P \Leftrightarrow Q$ ”の形をしているので, “ $P \Rightarrow Q$ ”と “ $Q \Rightarrow P$ ”をそれぞれ証明すること。

注として矢印が書いてあるものは, その向きは直観論理では証明できないことを示している。これは, 排中律の公理か二重否定の規則を使って証明する。

ドモルガンの法則	$\neg P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$	
	$\neg P \vee \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$	注 \Leftarrow
分配法則	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	
吸収法則	$(P \vee Q) \wedge \neg Q \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$	
	$(P \wedge Q) \vee \neg Q \Leftrightarrow P \vee \neg Q$	注 \Leftarrow
対偶の性質	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	注 \Leftarrow
\rightarrow の性質	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	注 \Rightarrow
	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$	注 \Leftarrow
	$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow R$	
	$(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$	注 \Leftarrow
	$(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$	注 \Rightarrow

7.4.3 解答

問題 7.4

(1) $P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P \vee Q$

$$\frac{\frac{\frac{\text{仮定 (*1)} \quad P}{P} \quad \frac{\text{前提} \quad P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q}}{\frac{Q}{\neg P \vee Q}} \quad \frac{\text{仮定 (*2)} \quad \neg(\neg P \vee Q)}{\neg(\neg P \vee Q)}}{\frac{\perp}{\neg P} \quad \text{(*1)} \quad \frac{\text{仮定 (*2)} \quad \neg(\neg P \vee Q)}{\neg(\neg P \vee Q)}}{\frac{\perp}{\neg\neg(\neg P \vee Q)} \quad \text{(*2)}}{\neg P \vee Q}}$$

問題 7.5

(ア) $\neg P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg(P \vee Q)$

$$\frac{\frac{\frac{\text{仮定 (*1)} \quad P}{P} \quad \frac{\text{仮定 (*2)} \quad Q}{Q}}{P \wedge Q} \quad \frac{\text{前提} \quad \neg(P \wedge Q)}{\neg(P \wedge Q)}}{\frac{\perp}{\neg P} \quad \text{(*1)} \quad \frac{\text{仮定 (*2)} \quad \neg Q}{\neg P \vee \neg Q}}{\frac{\text{公理} \quad Q \vee \neg Q}{\neg P \vee \neg Q} \quad \frac{\perp}{\neg P \vee \neg Q} \quad \text{(*2)}}{\neg P \vee \neg Q} \quad \text{(*2)}$$

(イ) $\neg P \wedge \neg Q \Leftarrow \neg(P \vee Q)$

$$\frac{\frac{\frac{\text{仮定 (*1)} \quad P}{P} \quad \frac{\text{前提} \quad \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q)}}{\frac{\perp}{\neg P} \quad \text{(*1)}} \quad \frac{\frac{\frac{\text{仮定 (*2)} \quad Q}{Q} \quad \frac{\text{前提} \quad \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q)}}{\frac{\perp}{\neg Q} \quad \text{(*2)}}}{\neg P \wedge \neg Q}}$$

(ウ) $\neg P \vee \neg Q \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$

$$\frac{\frac{\text{前提} \quad \neg P \vee \neg Q}{\neg P \vee \neg Q} \quad \frac{\frac{\frac{\text{仮定 (*2)} \quad P \wedge Q}{P \wedge Q} \quad \frac{\text{仮定 (*1)} \quad \neg P}{\neg P}}{\perp}}{\perp} \quad \frac{\frac{\frac{\text{仮定 (*2)} \quad P \wedge Q}{P \wedge Q} \quad \frac{\text{仮定 (*1)} \quad \neg Q}{\neg Q}}{\perp}}{\perp}}{\frac{\perp}{\neg(P \wedge Q)} \quad \text{(*2)}} \quad \text{(*1)}$$

(エ) $\neg P \vee \neg Q \Leftarrow \neg(P \wedge Q)$

$$\frac{\frac{\frac{\text{仮定 (*1)} \quad P}{P} \quad \frac{\text{仮定 (*2)} \quad Q}{Q}}{P \wedge Q} \quad \frac{\text{前提} \quad \neg(P \wedge Q)}{\neg(P \wedge Q)}}{\frac{\perp}{\neg P} \quad \text{(*1)} \quad \frac{\text{仮定 (*2)} \quad \neg Q}{\neg P \vee \neg Q}}{\frac{\text{公理} \quad Q \vee \neg Q}{\neg P \vee \neg Q} \quad \frac{\perp}{\neg P \vee \neg Q} \quad \text{(*2)}}{\neg P \vee \neg Q} \quad \text{(*2)}$$

(才) $\neg P \vee \neg Q \Leftarrow \neg(P \wedge Q)$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{仮定 (*1)} \\ P \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{仮定 (*2)} \\ Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{前提} \\ \neg(P \wedge Q) \end{array} \\
 \hline
 P \wedge Q \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \begin{array}{c} \neg P \\ \hline \neg P \vee \neg Q \end{array} \quad (*1) \qquad \begin{array}{c} \text{仮定 (*3)} \\ \neg(\neg P \vee \neg Q) \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \perp \\ \hline \neg Q \end{array} \quad (*2) \qquad \begin{array}{c} \text{仮定 (*3)} \\ \neg(\neg P \vee \neg Q) \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \perp \\ \hline \neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \end{array} \quad (*3) \\
 \hline
 \neg P \vee \neg Q
 \end{array}$$