8　形式的演繹体系

自然演繹体系 NI,NK から，形式的演繹体系 LI,LK に発展させる。

NI,NK では，いくつかの命題から別の命題を導く推論を重ねて，前提の命題から結論の命題を導出するものであった。前提以外の命題を仮定して推論を行い，特定の推論規則を用いたときに仮定から除外するという場合があるので，完成した証明図を見ただけではわかりにくい面がある。

LI では，結論の命題だけでなく前提も明らかにわかるように，導出式 $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B$ の形で推論を書くようにしたものである。

8.1　直観論理の形式的演繹体系 LI

公理

［公理］　$A \;\Rightarrow\; A$

推論規則 (論理結合子に関するもの)

以下の記述で，ギリシャ文字の大文字 $\Gamma, \Delta, \ldots$ は命題の集合である。

LI の［◯ 左］規則は NI の［◯ 除去］規則に対応し,［◯ 右］規則は NI の［◯ 導入］規則に対応している。

［$\wedge$ 左$_1$］　$$\frac{A, \Gamma \;\Rightarrow\; C}{A \wedge B, \Gamma \;\Rightarrow\; C}$$

［$\wedge$ 左$_2$］　$$\frac{B, \Gamma \;\Rightarrow\; C}{A \wedge B, \Gamma \;\Rightarrow\; C}$$

［$\wedge$ 右］　$$\frac{\Gamma_1 \;\Rightarrow\; A \qquad \Gamma_2 \;\Rightarrow\; B}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \;\Rightarrow\; A \wedge B}$$

［$\vee$ 左］　$$\frac{A, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; C \qquad B, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; C}{A \vee B, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \;\Rightarrow\; C}$$

［$\vee$ 右$_1$］　$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; A}{\Gamma \;\Rightarrow\; A \vee B}$$

［$\vee$ 右$_2$］　$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; B}{\Gamma \;\Rightarrow\; A \vee B}$$

［$\to$ 左］　$$\frac{\Gamma_1 \;\Rightarrow\; A \qquad B, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; C}{A \to B, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \;\Rightarrow\; C}$$

［$\to$ 右］　$$\frac{A, \Gamma \;\Rightarrow\; B}{\Gamma \;\Rightarrow\; A \to B}$$

［$\neg$ 左］　$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; A}{\neg A, \Gamma \;\Rightarrow\; \perp}$$

［$\neg$ 右］　$$\frac{A, \Gamma \;\Rightarrow\; \perp}{\Gamma \;\Rightarrow\; \neg A}$$

$\perp$は書かないで省略することにする（右辺は空になる)。

推論規則 (構造に関するもの)

［増左］　$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; C}{A, \Gamma \;\Rightarrow\; C}$$

［増右］　$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\;}{\Gamma \;\Rightarrow\; B}$$

［矛盾規則］に対応する。

［減左］ $\dfrac{A, A, \Gamma \ \Rightarrow\ C}{A, \Gamma \ \Rightarrow\ C}$　　［減右］　LI にはない

［換左］ $\dfrac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \ \Rightarrow\ C}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \ \Rightarrow\ C}$　　［換右］　LI にはない

$$［カット］\quad \frac{\Gamma_1 \ \Rightarrow\ A \qquad A, \Gamma_2 \ \Rightarrow\ C}{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \Rightarrow\ C}$$

8.2　LI における証明

例 8.1 $\neg (A \vee B) \ \Rightarrow\ \neg A \wedge \neg B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A \vee B}}{\neg (A \vee B), A \Rightarrow}}{A, \neg (A \vee B) \Rightarrow}}{\neg (A \vee B) \Rightarrow \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{B \Rightarrow A \vee B}}{\neg (A \vee B), B \Rightarrow}}{B, \neg (A \vee B) \Rightarrow}}{\neg (A \vee B) \Rightarrow \neg B}}{\neg (A \vee B) \quad \Rightarrow \quad \neg A \wedge \neg B}$$

問題 8.1 LI で証明しなさい。

ドモルガンの法則	$\neg A \wedge \neg B \ \Leftrightarrow\ \neg (A \vee B)$	
	$\neg A \vee \neg B \ \Leftrightarrow\ \neg (A \wedge B)$	($\Rightarrow$ のみ)
分配法則	$A \vee (B \wedge C) \ \Leftrightarrow\ (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
	$A \wedge (B \vee C) \ \Leftrightarrow\ (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
吸収法則	$(A \vee B) \wedge \neg B \ \Leftrightarrow\ A \wedge \neg B$	
	$(A \wedge B) \vee \neg B \ \Leftrightarrow\ A \vee \neg B$	($\Rightarrow$ のみ)
対偶の性質	$A \to B \ \Leftrightarrow\ \neg B \to \neg A$	($\Rightarrow$ のみ)
$\to$ の性質	$A \to B \ \Leftrightarrow\ \neg A \vee B$	($\Leftarrow$ のみ)
	$A \to B \ \Leftrightarrow\ \neg (A \wedge \neg B)$	($\Rightarrow$ のみ)
	$(A \to C) \wedge (B \to C) \ \Leftrightarrow\ (A \vee B) \to C$	
	$(A \to C) \vee (B \to C) \ \Leftrightarrow\ (A \wedge B) \to C$	($\Rightarrow$ のみ)
	$(A \to B) \wedge (\neg A \to C) \ \Leftrightarrow\ (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$	($\Leftarrow$ のみ)

定理 8.1 ［カット］を用いた証明は,［カット］を用いない証明に書き換えることができる。

系 8.2 排中律 $\Rightarrow\ A \vee \neg A$ は LI で証明できない。

証明　$\Rightarrow\ A \vee \neg A$ を導く［カット］を用いない証明があったとすると，最後に用いた規則は次のいずれかである。

$$\frac{\Rightarrow\ A}{\Rightarrow\ A \vee \neg A} \qquad \frac{\Rightarrow\ \neg A}{\Rightarrow\ A \vee \neg A}$$

これらの上式は，古典論理でも正しくない式であるから，証明できない。

直観論理の形式的体系 LI で，“ $\Rightarrow\ A \vee \neg A$” は証明できないが，“$A \wedge \neg A\ \Rightarrow$ ” は証明できる。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}(\neg\text{左})}{A \wedge \neg A, A \Rightarrow}(\wedge\text{左})}{A, A \wedge \neg A \Rightarrow}(\text{換左})}{A \wedge \neg A, A \wedge \neg A \Rightarrow}(\wedge\text{左})}{A \wedge \neg A \Rightarrow}(\text{減左})
$$

これをまねすると，右辺に命題を複数個書いてよければ，“ $\Rightarrow\ A \vee \neg A$” が証明できる。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \neg A}(\neg\text{右})}{\Rightarrow A, A \vee \neg A}(\vee\text{右})}{\Rightarrow A \vee \neg A, A}(\text{換右})}{\Rightarrow A \vee \neg A, A \vee \neg A}(\vee\text{右})}{\Rightarrow A \vee \neg A}(\text{減右})
$$

ゆえに，**導出式の右辺に任意個の命題を書ける**とすると，排中律が証明でき，古典論理の演繹体系になる。

8.3　古典論理の形式的演繹体系 LK

$A_1, \ldots, A_m \ \Rightarrow\ B_1, \ldots, B_n$ を導出式として扱う。この意味論的解釈は,

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \to B_1 \vee \ldots \vee B_n \quad \text{がトートロジーである}$$

ことを意味する。

公理

［公理］ $A \Rightarrow A$

推論規則 (論理結合子に関するもの)

［$\wedge$ 左$_1$］ $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

［$\wedge$ 左$_2$］ $\dfrac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

［$\wedge$ 右］ $\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \qquad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, B}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \cup \Delta_2, A \wedge B}$

［$\vee$ 左］ $\dfrac{A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \qquad B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \cup \Delta_2}$

［$\vee$ 右$_1$］ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$

［$\vee$ 右$_2$］ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$

$$[\to 左]\ \frac{\Gamma_1 \ \Rightarrow\ \Delta_1, A \qquad B, \Gamma_2 \ \Rightarrow\ \Delta_2}{A \to B, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \ \Rightarrow\ \Delta_1 \cup \Delta_2} \qquad [\to 右]\ \frac{A, \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, B}{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, A \to B}$$

$$[\neg 左]\ \frac{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, A}{\neg A, \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta} \qquad [\neg 右]\ \frac{A, \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta}{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, \neg A}$$

推論規則 (構造に関するもの)

$$[増左]\ \frac{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta}{A, \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta} \qquad [増右]\ \frac{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta}{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, B}$$

$$[減左]\ \frac{A, A, \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta}{A, \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta} \qquad [減右]\ \frac{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, A, A}{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, A}$$

$$[換左]\ \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \ \Rightarrow\ \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \ \Rightarrow\ \Delta} \qquad [換右]\ \frac{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta_1, B, A, \Delta_2}$$

$$[カット]\ \frac{\Gamma_1 \ \Rightarrow\ \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \ \Rightarrow\ \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \Rightarrow\ \Delta_1 \cup \Delta_2}$$

8.4　LK における証明

証明図を簡略化するために,［カット］以外の構造に関する規則の適用は書かないで飛ばしてよいことにする。

- 結合子に関する規則を左端あるいは右端にない命題に適用してもよい。
- 公理は両辺に同じ命題が含まれていればよい。
- $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ としてよい。
- ［∧ 左］,［∨ 右］は 2 つをまとめた次の規則としてよい。

$$[\wedge 左]\ \frac{A, B, \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta}{A \wedge B, \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta} \qquad [\vee 右]\ \frac{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, A, B}{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, A \vee B}$$

例 8.2 $\neg(A \wedge B) \ \Rightarrow\ \neg A \vee \neg B$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A, B \ \Rightarrow\ A \qquad A, B \ \Rightarrow\ B}{A, B \ \Rightarrow\ A \wedge B}}{A, B, \neg(A \wedge B) \ \Rightarrow\ }}{B, \neg(A \wedge B) \ \Rightarrow\ \neg A}}{\neg(A \wedge B) \ \Rightarrow\ \neg A, \neg B}}{\neg(A \wedge B) \ \Rightarrow\ \neg A \vee \neg B}$$

問題 8.2 問題 9.1 で（LI で証明できないため）保留になっていたものを LK で証明しなさい。