

9 述語論理の演繹体系

前章までに紹介した命題論理の演繹体系 NI,NK,LI,LK に次の推論規則を追加して述語論理に拡張する。

9.1 自然演繹体系

[\forall 除去]

$$\frac{\forall x F(x)}{F(t)}$$

ただし, t は任意の項

[\forall 導入]

$$\frac{F(a)}{\forall x F(x)}$$

ただし, a は, $F(a)$ が依存する仮定, 前提および $\forall x F(x)$ に現れない変数

[\exists 除去]

$$\frac{\begin{array}{c} \text{仮定 (*)} \\ F(a) \\ \vdots \\ \exists x F(x) \quad G \end{array}}{G} \quad (*)$$

ただし, a は, G が依存する $F(a)$ 以外の仮定, 前提および $G, \exists x F(x)$ に現れない変数

[\exists 導入]

$$\frac{F(t)}{\exists x F(x)}$$

ただし, t は任意の項

9.2 形式的演繹体系

[\forall 左]

$$\frac{F(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x F(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

ただし, t は任意の項

[\forall 右]

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, F(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x F(x)}$$

ただし, a は下式に現れない変数

[\exists 左]

$$\frac{F(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x F(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

ただし, a は下式に現れない変数

[\exists 右]

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, F(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x F(x)}$$

ただし, t は任意の項

9.3 例と問題

例 9.1 $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$

LI

$$\frac{P(a, b) \Rightarrow P(a, b)}{P(a, b) \Rightarrow \exists x P(x, b)}$$

$$\frac{\forall y P(a, y) \Rightarrow \exists x P(x, b)}{\forall y P(a, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)}$$

$$\frac{\forall y P(a, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)}{\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)}$$

NI

$$\frac{\text{仮定 (*1)} \quad \forall y P(a, y)}{P(a, b)}$$

$$\frac{\text{前提} \quad \exists x \forall y P(x, y)}{\forall y \exists x P(x, y)}$$

$$\frac{\forall y \exists x P(x, y)}{\forall y \exists x P(x, y)} \quad (*1)$$

[\forall 右] [\exists 左] [\forall 導入] [\exists 除去] を適用するとき, 変数条件を満たしていることに注意。

例 9.2 上の例の逆 $\forall y \exists x P(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$ は証明できない^{*1)}。下の証明は間違っている(どこがいけないか?)。

LI

$$\frac{P(a, b) \Rightarrow P(a, b)}{P(a, b) \Rightarrow \forall y P(a, y)}$$

$$\frac{P(a, b) \Rightarrow \forall y P(a, y)}{P(a, b) \Rightarrow \exists x \forall y P(x, y)}$$

$$\frac{\exists x P(x, b) \Rightarrow \exists x \forall y P(x, y)}{\forall y \exists x P(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x, y)}$$

NI

$$\frac{\text{前提} \quad \forall y \exists x P(x, y)}{\exists x P(x, b)}$$

$$\frac{\text{仮定 (*1)} \quad P(a, b)}{\forall y P(a, y)}$$

$$\frac{\exists x P(x, b) \quad \forall y P(a, y)}{\exists x \forall y P(x, y)} \quad (*1)$$

LI

$$\frac{P(a, b) \Rightarrow P(a, b)}{\exists x P(x, b) \Rightarrow P(a, b)}$$

$$\frac{\forall y \exists x P(x, y) \Rightarrow P(a, b)}{\forall y \exists x P(x, y) \Rightarrow \forall y P(a, y)}$$

$$\frac{\forall y \exists x P(x, y) \Rightarrow \forall y P(a, y)}{\forall y \exists x P(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x, y)}$$

NI

$$\frac{\text{前提} \quad \forall y \exists x P(x, y)}{\exists x P(x, b)}$$

$$\frac{\text{仮定 (*1)} \quad P(a, b)}{P(a, b)}$$

$$\frac{\exists x P(x, b) \quad P(a, b)}{\forall y P(a, y)}$$

$$\frac{\forall y P(a, y)}{\exists x \forall y P(x, y)} \quad (*1)$$

例 9.3 $\exists x (P(x) \rightarrow Q) \Rightarrow \forall x P(x) \rightarrow Q$

- | | | |
|-------|---|--------------------------------|
| (1.1) | $\exists x (P(x) \rightarrow Q) \Rightarrow \forall x P(x) \rightarrow Q$ | [\rightarrow 右](1.2) |
| (1.2) | $\forall x P(x), \exists x (P(x) \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ | [\exists 左](1.3) |
| (1.3) | $\forall x P(x), P(a) \rightarrow Q \Rightarrow Q$ | [\forall 左](1.4) |
| (1.4) | $P(a), P(a) \rightarrow Q \Rightarrow Q$ | [\rightarrow 左](2.1), (3.1) |
| (2.1) | $P(a) \Rightarrow P(a)$ | [公理] |
| (3.1) | $Q \Rightarrow Q$ | [公理] |

^{*1)} たとえば, $P(x, y)$ として $x = y$ を考えれば, この命題は正しくない。

例 9.4 $\forall x P(x) \rightarrow Q \Rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$ (古典論理)

$$\begin{array}{ll}
 (1.1) & \forall x P(x) \rightarrow Q \Rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q) \quad [\rightarrow \text{左}](2.1), (3.1) \\
 (2.1) & \Rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q), \forall x P(x) \quad [\forall \text{右}](2.2) \\
 (2.2) & \Rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q), P(a) \quad [\exists \text{右}](2.3) \\
 (2.3) & \Rightarrow P(a) \rightarrow Q, P(a) \quad [\rightarrow \text{右}](2.4) \\
 (2.4) & P(a) \Rightarrow Q, P(a) \quad [\text{公理}] \\
 (3.1) & Q \Rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q) \quad [\exists \text{右}](3.2) \\
 (3.2) & Q \Rightarrow P(b) \rightarrow Q \quad [\rightarrow \text{右}](3.3) \\
 (3.3) & P(b), Q \Rightarrow Q \quad [\text{公理}]
 \end{array}$$

問題 9.1

$$\begin{array}{ll}
 (1) & \neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x) \\
 (2) & \neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \quad (\Rightarrow \text{は古典論理}) \\
 (3) & \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \\
 (4) & \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x)) \\
 (5) & \forall x P(x) \wedge Q \Leftrightarrow \forall y (P(y) \wedge Q) \\
 (6) & \exists x P(x) \vee Q \Leftrightarrow \exists y (P(y) \vee Q) \\
 (7) & \forall x P(x) \vee Q \Leftrightarrow \forall y (P(y) \vee Q) \quad (\Leftarrow \text{は古典論理}) \\
 (8) & \exists x P(x) \wedge Q \Leftrightarrow \exists y (P(y) \wedge Q) \\
 (9) & P \rightarrow \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall y (P \rightarrow Q(y)) \\
 (10) & P \rightarrow \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists y (P \rightarrow Q(y)) \quad (\Rightarrow \text{は古典論理}) \\
 (11) & \forall x P(x) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists y (P(y) \rightarrow Q) \quad (\Rightarrow \text{は古典論理}) \\
 (12) & \exists x P(x) \rightarrow Q \Leftrightarrow \forall y (P(y) \rightarrow Q)
 \end{array}$$

注 9.1 (5)以降で x を y に書き換えたのは, 下の注 10.2 の例のように「 Q に x が使われている場合, 新しい変数で書き換える」ことを意味している。 Q に x が使われていない場合は x のままでよい。

注 9.2 (9), (11) を用いて $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$ の同値変形を行うと

$$\begin{array}{l}
 \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \xLeftrightarrow{(9)} \forall y (\forall x P(x) \rightarrow Q(y)) \xLeftrightarrow{(11)} \forall y \exists z (P(z) \rightarrow Q(y)) \\
 \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \xLeftrightarrow{(11)} \exists z (P(z) \rightarrow \forall x Q(x)) \xLeftrightarrow{(9)} \exists z \forall y (P(z) \rightarrow Q(y))
 \end{array}$$

ゆえに

$$\forall y \exists z (P(z) \rightarrow Q(y)) \iff \exists z \forall y (P(z) \rightarrow Q(y)) \quad (\text{古典論理})$$

9.4 解答

証明したい式から分解していくとき，原則として次の優先順位に従って分解していくとよい。

- 先 $[\forall 右], [\exists 左]$ (新しい変数を代入する)
 $[\neg 右]$
 $[\neg 左]$ (LI のとき要注意，後回しにすることもある)
 $[\rightarrow 右], [\wedge 左_3]$
(LK のとき) $[\vee 右_3]$
 $[\wedge 右], [\vee 左]$
 $[\rightarrow 左]$ (LI のとき要注意，後回しにすることもある)
(LI のとき) $[\vee 右_1], [\vee 右_2]$ (どちらを使うかがポイント)
後 $[\forall 左], [\exists 右]$ (適用する前に [減] でコピーを作ることもある)

(1) \Rightarrow

- (1.1) $\neg \exists x P(x) \Rightarrow \forall x \neg P(x)$ $[\forall 右](1.2)$
(1.2) $\neg \exists x P(x) \Rightarrow \neg P(a)$ $[\neg 右](1.3)$
(1.3) $P(a), \neg \exists x P(x) \Rightarrow$ $[\neg 左](1.4)$
(1.4) $P(a) \Rightarrow \exists x P(x)$ $[\exists 右](1.5)$
(1.5) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]

(1) \Leftarrow

- (1.1) $\forall x \neg P(x) \Rightarrow \neg \exists x P(x)$ $[\neg 右](1.2)$
(1.2) $\exists x P(x), \forall x \neg P(x) \Rightarrow$ $[\exists 左](1.3)$
(1.3) $P(a), \forall x \neg P(x) \Rightarrow$ $[\forall 左](1.4)$
(1.4) $P(a), \neg P(a) \Rightarrow$ $[\neg 左](1.5)$
(1.5) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]

(2) \Rightarrow (LK)

- (1.1) $\neg \forall x P(x) \Rightarrow \exists x \neg P(x)$ $[\neg 左](1.2)$
(1.2) $\Rightarrow \exists x \neg P(x), \forall x P(x)$ $[\forall 右](1.3)$
(1.3) $\Rightarrow \exists x \neg P(x), P(a)$ $[\exists 右](1.4)$
(1.4) $\Rightarrow \neg P(a), P(a)$ $[\neg 右](1.5)$
(1.5) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]

(2) \Leftarrow

- (1.1) $\exists x \neg P(x) \Rightarrow \neg \forall x P(x)$ $[\exists 左](1.2)$
(1.2) $\neg P(a) \Rightarrow \neg \forall x P(x)$ $[\neg 右](1.3)$
(1.3) $\forall x P(x), \neg P(a) \Rightarrow$ $[\neg 左](1.4)$
(1.4) $\forall x P(x) \Rightarrow P(a)$ $[\forall 左](1.5)$
(1.5) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]

(3) \Rightarrow

- (1.1) $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$ [\forall 右](1.2)
 (1.2) $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow P(a) \wedge Q(a)$ [\wedge 右](2.1), (3.1)
 (2.1) $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow P(a)$ [\wedge 左₁](2.2)
 (2.2) $\forall x P(x) \Rightarrow P(a)$ [\forall 左](2.3)
 (2.3) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]
 (3.1) $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow Q(a)$ [\wedge 左₂](3.2)
 (3.2) $\forall x Q(x) \Rightarrow Q(a)$ [\forall 左](3.3)
 (3.3) $Q(a) \Rightarrow Q(a)$ [公理]

(3) \Leftarrow

- (1.1) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ [\wedge 右](2.1), (3.1)
 (2.1) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x)$ [\forall 右](2.2)
 (2.2) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow P(a)$ [\forall 左](2.3)
 (2.3) $P(a) \wedge Q(a) \Rightarrow P(a)$ [\wedge 左₁](2.4)
 (2.4) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]
 (3.1) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x Q(x)$ [\forall 右](3.2)
 (3.2) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow Q(b)$ [\forall 左](3.3)
 (3.3) $P(b) \wedge Q(b) \Rightarrow Q(b)$ [\wedge 左₂](3.4)
 (3.4) $Q(b) \Rightarrow Q(b)$ [公理]

(4) \Rightarrow

- (1.1) $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$ [\vee 左](2.1), (3.1)
 (2.1) $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$ [\exists 左](2.2)
 (2.2) $P(a) \Rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$ [\exists 右](2.3)
 (2.3) $P(a) \Rightarrow P(a) \vee Q(a)$ [\vee 右₁](2.4)
 (2.4) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]
 (3.1) $\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$ 以下略

(4) \Leftarrow

- (1.1) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ [\exists 左](1.2)
 (1.2) $P(a) \vee Q(a) \Rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ [\vee 左](2.1), (3.1)
 (2.1) $P(a) \Rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ [\vee 右₁](2.2)
 (2.2) $P(a) \Rightarrow \exists x P(x)$ [\exists 右](2.3)
 (2.3) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]
 (3.1) $Q(a) \Rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ 以下略

(5) \Rightarrow

- (1.1) $\forall x P(x) \wedge Q \Rightarrow \forall y (P(y) \wedge Q)$ [\forall 右](1.2)
 (1.2) $\forall x P(x) \wedge Q \Rightarrow P(a) \wedge Q$ [\wedge 右](2.1), (3.1)
 (2.1) $\forall x P(x) \wedge Q \Rightarrow P(a)$ [\wedge 左₁](2.2)
 (2.2) $\forall x P(x) \Rightarrow P(a)$ [\forall 左](2.3)
 (2.3) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]
 (3.1) $\forall x P(x) \wedge Q \Rightarrow Q$ 以下略

(5) \Leftarrow

- (1.1) $\forall y (P(y) \wedge Q) \Rightarrow \forall x P(x) \wedge Q$ [\wedge 右](2.1), (3.1)
 (2.1) $\forall y (P(y) \wedge Q) \Rightarrow \forall x P(x)$ [\forall 右](2.2)
 (2.2) $\forall y (P(y) \wedge Q) \Rightarrow P(a)$ [\forall 左](2.3)
 (2.3) $P(a) \wedge Q \Rightarrow P(a)$ [\wedge 左₁](2.4)
 (2.4) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]
 (3.1) $\forall y (P(y) \wedge Q) \Rightarrow Q$ 以下略

(6) \Rightarrow

- (1.1) $\exists x P(x) \vee Q \Rightarrow \exists y (P(y) \vee Q)$ [\vee 左](2.1), (3.1)
 (2.1) $\exists x P(x) \Rightarrow \exists y (P(y) \vee Q)$ [\exists 左](2.2)
 (2.2) $P(a) \Rightarrow \exists y (P(y) \vee Q)$ [\exists 右](2.3)
 (2.3) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]
 (3.1) $Q \Rightarrow \exists y (P(y) \vee Q)$ 以下略

(6) \Leftarrow

- (1.1) $\exists y (P(y) \vee Q) \Rightarrow \exists x P(x) \vee Q$ [\exists 左](1.2)
 (1.2) $P(a) \vee Q \Rightarrow \exists x P(x) \vee Q$ [\vee 左](2.1), (3.1)
 (2.1) $P(a) \Rightarrow \exists x P(x) \vee Q$ [\vee 右₁](2.2)
 (2.2) $P(a) \Rightarrow \exists x P(x)$ [\exists 右](2.3)
 (2.2) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]
 (3.1) $Q \Rightarrow \exists x P(x) \vee Q$ 以下略

(7) \Rightarrow

- (1.1) $\forall x P(x) \vee Q \Rightarrow \forall y (P(y) \vee Q)$ [\forall 右](1.2)
 (1.2) $\forall x P(x) \vee Q \Rightarrow P(a) \vee Q$ [\vee 左](2.1), (3.1)
 (2.1) $\forall x P(x) \Rightarrow P(a) \vee Q$ [\vee 右₁](2.2)
 (2.2) $\forall x P(x) \Rightarrow P(a)$ [\forall 左](2.3)
 (2.3) $P(a) \Rightarrow P(a)$ [公理]
 (3.1) $Q \Rightarrow P(a) \vee Q$ 以下略

(7)⇐ LK

- (1.1) $\forall y (P(y) \vee Q) \Rightarrow \forall x P(x) \vee Q$ [\forall 右₃](1.2)
 (1.2) $\forall y (P(y) \vee Q) \Rightarrow \forall x P(x), Q$ [\forall 右](1.3)
 (1.3) $\forall y (P(y) \vee Q) \Rightarrow P(a), Q$ [\forall 左](1.4)
 (1.3) $P(a) \vee Q \Rightarrow P(a), Q$ [\vee 左](2.1), (3.1)
 (2.1) $P(a) \Rightarrow P(a), Q$ [公理]
 (3.1) $Q \Rightarrow P(a), Q$ [公理]

(8)⇒

- (1.1) $\exists x P(x) \wedge Q \Rightarrow \exists y (P(y) \wedge Q)$ [\wedge 左₃](1.2)
 (1.2) $\exists x P(x), Q \Rightarrow \exists y (P(y) \wedge Q)$ [\exists 左](1.3)
 (1.3) $P(a), Q \Rightarrow \exists y (P(y) \wedge Q)$ [\exists 右](1.4)
 (1.4) $P(a), Q \Rightarrow P(a) \wedge Q$ [\wedge 右](2.1), (3.1)
 (2.1) $P(a), Q \Rightarrow P(a)$ [公理]
 (3.1) $P(a), Q \Rightarrow Q$ [公理]

(8)⇐

- (1.1) $\exists y (P(y) \wedge Q) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge Q$ [\exists 左](1.2)
 (1.2) $P(a) \wedge Q \Rightarrow \exists x P(x) \wedge Q$ [\wedge 左₃](2.2)
 (1.3) $P(a), Q \Rightarrow \exists x P(x) \wedge Q$ [\wedge 右](2.1), (3.1)
 (2.1) $P(a), Q \Rightarrow \exists x P(x)$ [\forall 右](2.2)
 (2.2) $P(a), Q \Rightarrow P(a)$ [公理]
 (3.1) $P(a), Q \Rightarrow Q$ [公理]

(9)⇒

- (1.1) $P \rightarrow \forall x Q(x) \Rightarrow \forall y (P \rightarrow Q(y))$ [\forall 右](1.2)
 (1.2) $P \rightarrow \forall x Q(x) \Rightarrow P \rightarrow Q(a)$ [\rightarrow 右](1.3)
 (1.3) $P, P \rightarrow \forall x Q(x) \Rightarrow Q(a)$ [\rightarrow 左](2.1), (3.1)
 (2.1) $P \Rightarrow P$ [公理]
 (3.1) $\forall x Q(x) \Rightarrow Q(a)$ [\forall 左](3.2)
 (3.2) $Q(a) \Rightarrow Q(a)$ [公理]

(9)⇐

- (1.1) $\forall y (P \rightarrow Q(y)) \Rightarrow P \rightarrow \forall x Q(x)$ [\rightarrow 右](1.2)
 (1.2) $P, \forall y (P \rightarrow Q(y)) \Rightarrow \forall x Q(x)$ [\forall 右](1.3)
 (1.3) $P, \forall y (P \rightarrow Q(y)) \Rightarrow Q(a)$ [\forall 左](1.4)
 (1.4) $P, P \rightarrow Q(a) \Rightarrow Q(a)$ [\rightarrow 左](2.1), (3.1)
 (2.1) $P \Rightarrow P$ [公理]
 (3.1) $Q(a) \Rightarrow Q(a)$ [公理]

(10) \Rightarrow LK

- (1.1) $P \rightarrow \exists x Q(x) \Rightarrow \exists y (P \rightarrow Q(y))$ $[\rightarrow \text{左}](2.1), (3.1)$
 (2.1) $\Rightarrow \exists y (P \rightarrow Q(y)), P$ $[\exists \text{右}](2.2)$
 (2.2) $\Rightarrow P \rightarrow Q(a), P$ $[\rightarrow \text{右}](2.3)$
 (2.3) $P \Rightarrow Q(a), P$ $[\text{公理}]$
 (3.1) $\exists x Q(x) \Rightarrow \exists y (P \rightarrow Q(y))$ $[\exists \text{左}](3.2)$
 (3.2) $Q(b) \Rightarrow \exists y (P \rightarrow Q(y))$ $[\exists \text{右}](3.3)$
 (3.3) $Q(b) \Rightarrow P \rightarrow Q(b)$ $[\rightarrow \text{右}](3.4)$
 (3.4) $P, Q(b) \Rightarrow Q(b)$ $[\text{公理}]$

(10) \Leftarrow

- (1.1) $\exists y (P \rightarrow Q(y)) \Rightarrow P \rightarrow \exists x Q(x)$ $[\exists \text{左}](1.2)$
 (1.2) $P \rightarrow Q(a) \Rightarrow P \rightarrow \exists x Q(x)$ $[\rightarrow \text{右}](1.3)$
 (1.3) $P, P \rightarrow Q(a) \Rightarrow \exists x Q(x)$ $[\exists \text{右}](1.4)$
 (1.4) $P, P \rightarrow Q(a) \Rightarrow Q(a)$ 以下略

(11) \Rightarrow LK

- (1.1) $\forall x P(x) \rightarrow Q \Rightarrow \exists y (P(y) \rightarrow Q)$ $[\rightarrow \text{左}](2.1)(3.1)$
 (2.1) $\Rightarrow \exists y (P(y) \rightarrow Q), \forall x P(x)$ $[\forall \text{右}](2.2)$
 (2.2) $\Rightarrow \exists y (P(y) \rightarrow Q), P(a)$ $[\exists \text{右}](2.3)$
 (2.3) $\Rightarrow P(a) \rightarrow Q, P(a)$ $[\rightarrow \text{右}](2.4)$
 (2.4) $P(a) \Rightarrow Q, P(a)$ $[\text{公理}]$
 (3.1) $Q \Rightarrow \exists y (P(y) \rightarrow Q)$ 以下略

(11) \Leftarrow

- (1.1) $\exists y (P(y) \rightarrow Q) \Rightarrow \forall x P(x) \rightarrow Q$ $[\exists \text{左}](1.2)$
 (1.2) $P(a) \rightarrow Q \Rightarrow \forall x P(x) \rightarrow Q$ $[\rightarrow \text{右}](1.3)$
 (1.3) $\forall x P(x), P(a) \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $[\forall \text{左}](1.4)$
 (1.4) $P(a), P(a) \rightarrow Q \Rightarrow Q$ 以下略

(12) \Rightarrow

- (1.1) $\exists x P(x) \rightarrow Q \Rightarrow \forall y (P(y) \rightarrow Q)$ $[\forall \text{右}](1.2)$
 (1.2) $\exists x P(x) \rightarrow Q \Rightarrow P(a) \rightarrow Q$ $[\rightarrow \text{右}](1.3)$
 (1.3) $P(a), \exists x P(x) \rightarrow Q \Rightarrow Q$ $[\rightarrow \text{左}](2.1)(3.1)$
 (2.1) $P(a) \Rightarrow \exists x P(x)$ $[\exists \text{右}](2.2)$
 (2.2) $P(a) \Rightarrow P(a)$ $[\text{公理}]$
 (3.1) $Q \Rightarrow Q$ $[\text{公理}]$

(12) \Leftarrow

- (1.1) $\forall y (P(y) \rightarrow Q) \Rightarrow \exists x P(x) \rightarrow Q$ $[\rightarrow \text{右}](1.2)$
 (1.2) $\exists x P(x), \forall y (P(y) \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ $[\exists \text{左}](1.3)$
 (1.3) $P(a), \forall y (P(y) \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ $[\forall \text{左}](1.4)$
 (1.4) $P(a), P(a) \rightarrow Q \Rightarrow Q$ 以下略