

1 油分け算

問題 桶に油がたくさん入っている。8リットル入りの容器 X と 5リットル入りの容器 Y を使って、4リットル量りなさい。ただし、他の容器を使ってはいけない。

解答 1 次の3つの操作を繰り返して量る。

- (1) 桶から容器 X に 8リットル移す。
- (2) 容器 X から容器 Y に移せるだけ移す。
- (3) 容器 Y から桶に 5リットル移す。

回	操作	X	Y
1	(1)	8	0
2	(2)	3	5
3	(3)	3	0
4	(2)	0	3
5	(1)	8	3
6	(2)	6	5
7	(3)	6	0
8	(2)	1	5
9	(3)	1	0
10	(2)	0	1
11	(1)	8	1
12	(2)	4	5
13	(3)	4	0

操作 (1) を 3回、操作 (3) を 4回行ったので

$$8 \times 3 - 5 \times 4 = 4$$

ということである。

解答 2 次の3つの操作を繰り返して量る。

- (4) 桶から容器 Y に 5リットル移す。
- (5) 容器 Y から容器 X に移せるだけ移す。
- (6) 容器 X から桶に 8リットル移す。

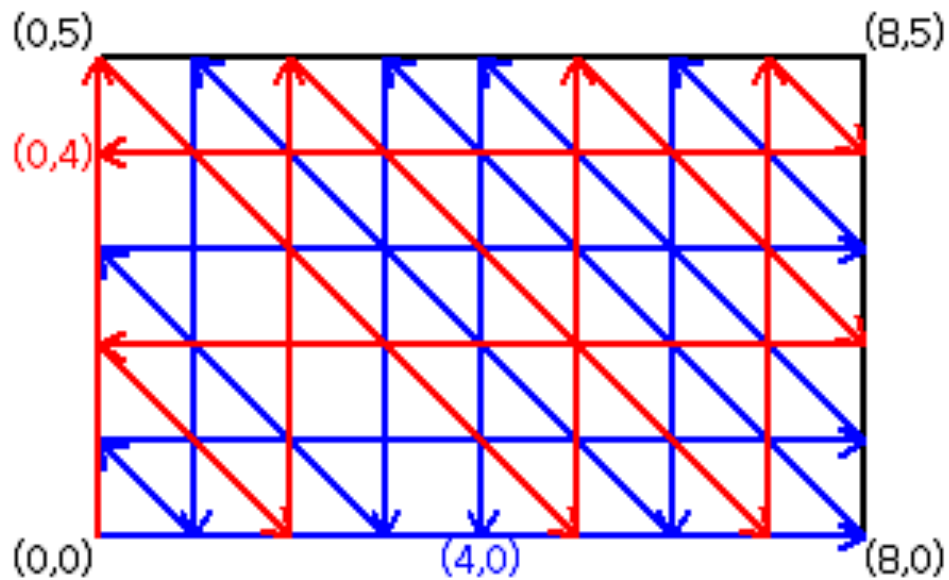
回	操作	X	Y
1	(4)	0	5
2	(5)	5	0
3	(4)	5	5
4	(5)	8	2
5	(6)	0	2
6	(5)	2	0
7	(4)	2	5
8	(5)	7	0
9	(4)	7	5
10	(5)	8	4
11	(6)	0	4

操作 (4) を 4回、操作 (6) を 2回行ったので

$$-8 \times 2 + 5 \times 4 = 4$$

ということである。

容器 X と Y に入っている油の量の組 (x, y) がどう変化していくか，座標に図示するとわかりやすい。解答 1 の変化を青，解答 2 の変化を赤で示すとこのようになる。



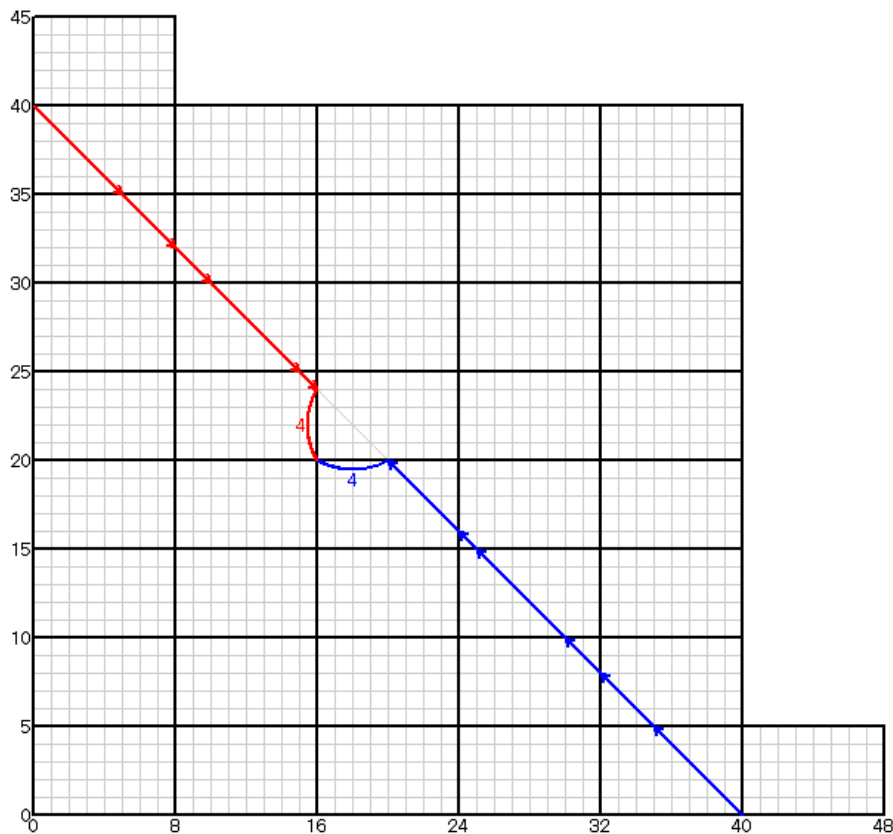
- (1) 横の矢印は，桶から 8 リットル容器 X へ，あるいは容器 X から桶に移す操作である。
- (2) 縦の矢印は，桶から 5 リットル容器 Y へ，あるいは容器 Y から桶に移す操作である。
- (3) 斜めの矢印は，容器 X から Y へ，あるいは容器 Y から X へ移す操作である。

この図では，操作の回数がわかりにくい。

解答1（青矢印）では、横の矢印は左端から右端へ、縦の矢印は上端から下端へと決まっている。横の矢印をかくかわりに長方形を左に追加し、縦の矢印をかくかわりに長方形を上を追加するようにして、左上に進む斜めの矢印だけにする。

解答2（赤矢印）では、横の矢印は右端から左端へ、縦の矢印は下端から上端へと決まっている。横の矢印をかくかわりに長方形を右に追加し、縦の矢印をかくかわりに長方形を下を追加するようにして、右下に進む斜めの矢印だけにする。

このようにかき変えるところなる。



- (1) 40×40 の格子をかく ($40 = 8 \times 5$)。
- (2) 直線 $x = (8 \text{ の倍数})$ と $y = (5 \text{ の倍数})$ を太くかく。
- (3) $(40, 0)$ と $(0, 40)$ を結ぶ直線（対角線）をかく。
- (4) その対角線上を端から進んで行く。
- (5) 横の太線と交わるとき、桶から8リットル容器 X へまたは容器 X から桶へ移す操作を行う。
- (6) 縦の太線と交わるとき、桶から5リットル容器 Y へまたは容器 Y から桶へ移す操作を行う。
- (7) その途中で X から Y へまたは Y から X へ移す操作を行う。

したがって、出発点から目的地までに、太線と何回交わるかを数えれば、操作の回数わかる。

問題 a, b は互いに素な自然数とする。 a リットル入りの容器 X と b リットル入りの容器 Y を使って c リットルを量る。すなわち、2つの容器に入っている油を合わせて c リットルになるようにする。操作回数 $N(C)$ が最大になる c と、そのときの $N(c)$ を求めなさい。

解答

- $c = xa - yb$ ($0 \leq x < b, 0 \leq y < a$) のとき

容器 X で x 回汲み, 容器 Y で y 回戻し, その間に X から Y へ $x + y - 1$ 回移す。ゆえに

$$N_1(c) = 2(x + y) - 1 \quad \text{回操作する。}$$

$c = -(b - x)a + (a - y)b$ でもあるので Y 容器で汲み, X 容器で戻すしかたでは

$$N_2(c) = 2(b - x + a - y) - 1 = 2(a + b - 1) - N_1(c) \quad \text{回操作する。}$$

- a, b が奇数の場合

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{b+1}{2}a - \frac{a-1}{2}b \quad \text{のとき最大になり}$$

$$N_1(c) = a + b - 1$$

$$N_2(c) = a + b - 1$$

$$\therefore N(c) = a + b - 1$$

- a が奇数, b が偶数の場合

$$c = \frac{b}{2} = \frac{b}{2}a - \frac{a-1}{2}b \quad \text{のとき最大になり}$$

$$N_1(c) = a + b - 2$$

$$N_2(c) = a + b$$

$$\therefore N(c) = a + b - 2$$