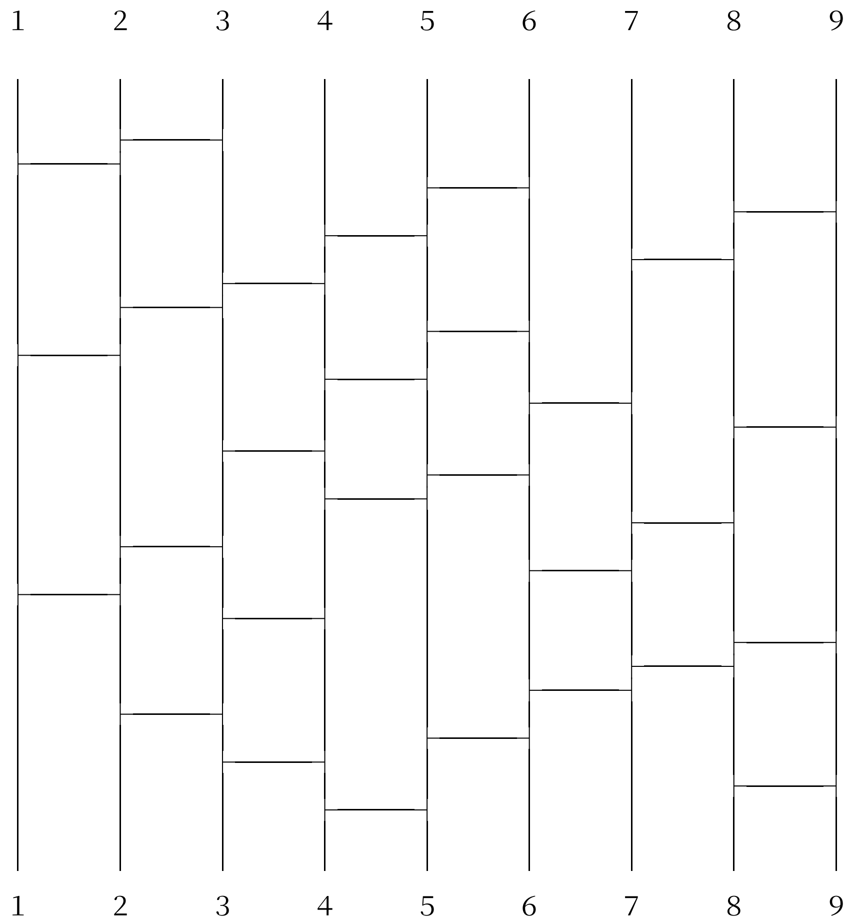
1　あみだくじ

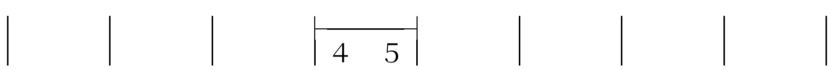
1.1　あみだくじの橋の数

問題 1.1　このあみだくじについて，下の問に答えなさい。



(1)　入り口（上）の番号の下に，対応する出口（下）の番号を書きなさい。

(2)　入り口から出口に進むとき，渡った橋（横線）の下に，その番号を書きなさい。ただし，左から右に渡った番号は右下に，右から左に渡った番号は左下に書きなさい。たとえば，一番下にある橋には，次のように番号が書かれる。



(3)　入り口と出口の対応が変わらないように，6 本の（無駄な）橋を削ることができる。無駄な橋を削除しなさい。

(4)　残った橋の下に書かれた番号のペアについて，気づいたことを述べなさい。

定義 1.1
1〜n の番号を 1 つずつ一列に並べたものを**順列**という。
ある順列の中の 2 つの番号について，左にある方が小さいとき**正順ペア**，左にある方が大きいとき**逆順ペア**と呼ぶ。
逆順ペアが偶数個ある順列を**偶順列**，奇数個ある順列を**奇順列**という。

問題 10.1 の解答から，つぎのことがわかる。

定理 1.1 与えられた順列を番号順に並べ変える（**整列する**という）あみだくじについて

(1) 橋の最少数は，その順列の中の逆順ペアの個数である。

(2) それより多い橋を使ったあみだくじは，偶数本の橋を削除して再少数にすることができる。

(3) 与えられた順列が奇順列 $\Leftrightarrow$ 奇数本の橋で整列できる。

(4) 与えられた順列が偶順列 $\Leftrightarrow$ 偶数本の橋で整列できる。

例 1.1 問題 10.1 の順列 693815472 について

(1) 逆順ペアの数は，$5+7+2+5+0+2+1+1+0=23$ だから奇順列である。

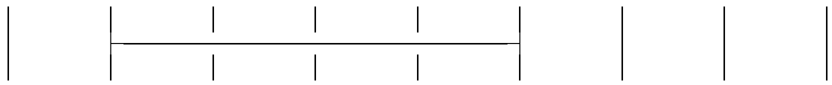
(2) 29 本の橋をもつあみだくじで整列できたから奇順列である。

(3) それから橋を 6 本削除して，最小数 23 本にできた。

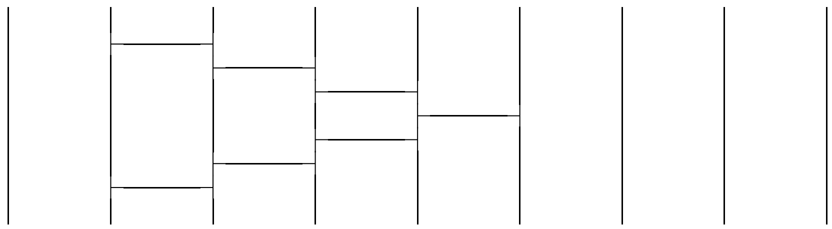
1.2　跨線橋可あみだくじ

普通のあみだくじは，隣り合った道と道の間に橋をかけるが，離れている道と道の間にも橋（**跨線橋**）をかけてよいことにする。

注 1.1 途中 k 本の道を跨ぐ跨線橋は $2k+1$ 本の普通の橋に書き換えることができる。

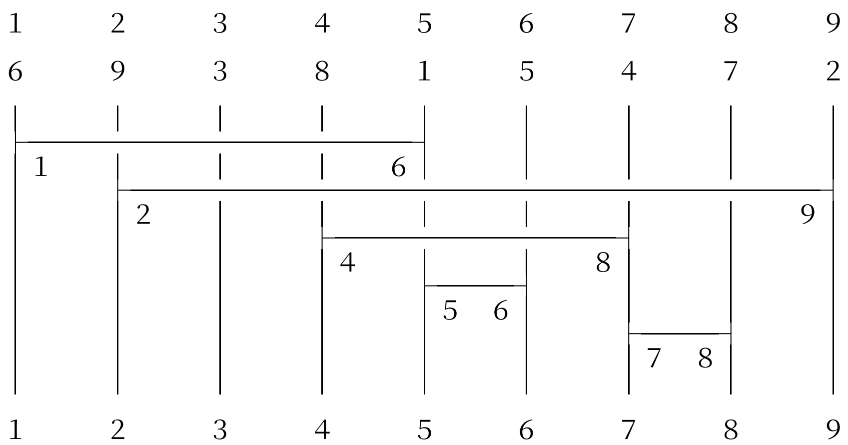


は，つぎのように書き換えることができる。



> **定理 1.2** 与えられた順列を整列する跨線橋可あみだくじについても
>
> (1)　与えられた順列が奇順列 $\Leftrightarrow$ 奇数本の橋で整列できる。
>
> (2)　与えられた順列が偶順列 $\Leftrightarrow$ 偶数本の橋で整列できる。

例 1.2 問題 10.1 の順列を跨線橋可あみだくじで整列する。



5 本でできたので奇順列である。

跨線橋可あみだくじを使うと，普通のあみだくじを使ったり，逆順ペアを数えるより簡単に，奇順列か偶順列かしらべられる。

問題 1.2 順列　5 3 8 6 9 1 2 7 4　の奇偶を，跨線橋可あみだくじを書いてしらべなさい。

1.3 サイクル表現

あみだくじにおいて,「i 番目の入り口から入ると k 番目の出口へ進む」ことを「$i \to k$」と矢印で表すことにする。

例 10.2 のあみだくじは,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 9 & 3 & 8 & 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \end{array}$$

となるが,これを,次のように簡潔に書くことができる(**サイクル表現**)。

$1 \to 6 \to 5 \Lsh$, $2 \to 9 \Lsh$, $3 \Lsh$, $4 \to 8 \to 7 \Lsh$ ($\Lsh$ は先頭に戻る意味である)

これが,跨線橋可あみだくじに対応していて,$a \to b \to c \to \cdots \to d \Lsh$ を,

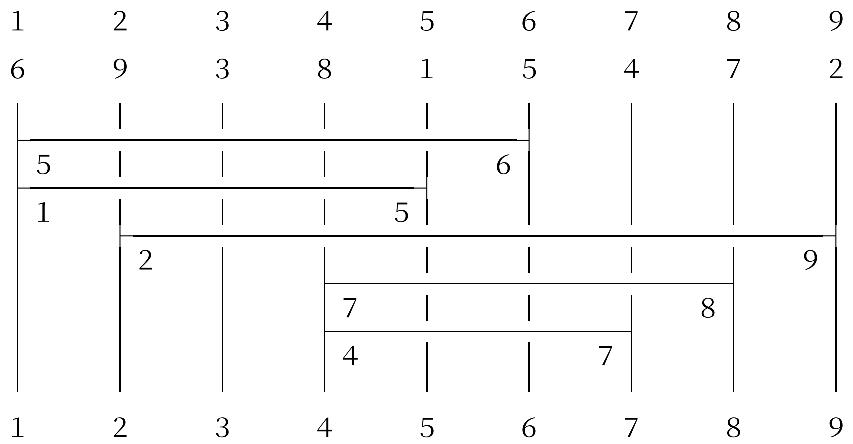
a 番目と b 番目の道を結ぶ橋をかける

a 番目と c 番目の道を結ぶ橋をかける

$\vdots$

a 番目と d 番目の道を結ぶ橋をかける

とすればよい。



順列の奇偶が,$\to$ の個数の奇偶と一致するが,

$$\to \text{の個数} = n - (\Lsh \text{の個数}) = n - (\text{サイクルの個数})$$

なので,サイクルの個数を数えるだけで判定できる。

問題 1.3 次の順列の奇偶を判定しなさい。

(1) 7 3 9 8 2 6 1 5 4

(2) 8 2 9 10 3 13 15 7 6 16 4 14 5 12 11 1