1　母関数

1.1　母関数と係数列

定義 1 (母関数)
数列

$$\{a_k\} \quad = \quad a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots \quad (k \text{ が } 0 \text{ から始まることに注意})$$

と，それを係数にもつ ∞ 次関数

$$f(x) \quad = \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_k x^k + \cdots$$

について，$f(x)$ を $\{a_k\}$ の**母関数**と言い，逆に $\{a_k\}$ を $f(x)$ の**係数列**と言う。

問題 1　次の数列の母関数 $f_i(x)$ (i は問題番号) を求めなさい。

(1)　$a_k = 1 \quad (1, 1, 1, 1, 1, \cdots)$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \quad (\text{等比数列の和}) \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

(**注**) 式 (1) と (2) が一致するのは，(1) が収束する $|x| < 1$ の範囲ですが，この章では収束範囲は気にしないことにします。

(2)　$a_k = 2^k \quad (1, 2, 4, 8, 16, \cdots)$

(3)　$a_k = k + 1 \quad (1, 2, 3, 4, 5, \cdots)$（ヒント：$f_1(x)$ を利用する）

(4)　$a_k = 2k + 1 \quad (1, 3, 5, 7, 9, \cdots)$

問題 2 次の関数の係数列 (の一般項) を求めなさい。

(5)　$f_5(x) = \dfrac{1}{1-3x}$

(6)　$f_6(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$

(7)　$f_7(x) = \dfrac{1}{1-3x+2x^2}$　（ヒント：部分分数に分解する）

1.2　二項定理の一般化

定義 2 (二項係数の拡張)
実数 α と，自然数（0 を含む）k について

$$ {}_{\alpha}\mathrm{C}_k \quad = \quad \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha-2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{\alpha-k+1}{k} $$

と定義する。

定理 1 (二項定理の拡張)

$$ (1+x)^{\alpha} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}_{\alpha}\mathrm{C}_k\, x^k $$

すなわち

$$ (1+x)^{\alpha} \quad = \quad 1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha-1}{2}x^2+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha-2}{3}x^3+\cdots $$

問題 3 次の関数の係数列を求めなさい。

(8)　$f_8(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$$ \begin{aligned} f_8(x) &= (1+x)^{-2} \\ &= 1+\frac{-2}{1}x+\frac{-2}{1}\frac{-3}{2}x^2+\frac{-2}{1}\frac{-3}{2}\frac{-4}{3}x^3+\cdots \\ &= 1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+\underbrace{(-1)^k(k+1)}_{a_k}x^k+\cdots \end{aligned} $$

(9)　$f_9(x)=\dfrac{1}{(1-x)^3}$　（問題 2 の結果と比べよ）

(10)　$f_{10}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

1.3 漸化式への応用

問題 4 次の漸化式で定義される数列の一般項を，母関数を用いて求めなさい.

(1) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_k = 2a_{k-1} + k + 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots \\
&= 1 + (2a_0 + 2)x + (2a_1 + 3)x^2 + \cdots + (2a_{k-1} + k + 1)x^k + \cdots \\
&= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) + 2x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots) \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} + 2xf(x) \\
(1-2x)f(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\
\therefore\ f(x) &= \frac{1}{(1-2x)(1-x)^2} = \frac{4}{1-2x} - \frac{2}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \quad 4(1 + 2x + \ 4x^2 + \cdots + 2^k x^k + \cdots) \\
&\quad -2(1 + 1x + \ 1x^2 + \cdots + 1x^k + \cdots) \\
&\quad -1(1 + 2x + \ 3x^2 + \cdots + (k+1)x^k + \cdots) \\
&= \qquad 1 + 4x + 11x^2 + \cdots + \underbrace{(4 \cdot 2^k - k - 3)}_{a_k} x^k + \cdots \\
\therefore\ a_k &= 2^{k+2} - k - 3
\end{aligned}$$

(2) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_k = 3a_{k-1} + 2^k \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_1 = 1 \\ a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2} \end{cases}$

問題 5 次の漸化式で定義される数列の一般項を，母関数を用いて求めなさい．

(1) $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots \\
&= 3 + a_0 x + (a_0 + a_1)x^2 + \cdots + (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})x^k + \cdots \\
&= 3 + a_0 x + a_0 x^2 + \cdots + a_0 x^k + \cdots \\
&\qquad + a_1 x^2 + \cdots + a_1 x^k + \cdots \\
&\qquad + \cdots + a_2 x^k + \cdots \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad + a_{k-1} x^k + \cdots \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&= 3 + (1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} + \cdots)x \\
&\qquad \times (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots) \\
&= 3 + \frac{x}{1-x} f(x)
\end{aligned}$$

$$\frac{1-2x}{1-x} f(x) = 3$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{1-2x} - \frac{3x}{1-2x} \\
&= 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot 8x^3 + \cdots + 3 \cdot 2^k x^k + \cdots \\
&\qquad - 3 \cdot 1x - 3 \cdot 2x^2 - 3 \cdot 4x^3 - \cdots - 3 \cdot 2^{k-1} x^k - \cdots \\
&= 3 + 3 \cdot 1x + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots + 3 \cdot 2^{k-1} x^k + \cdots
\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_k = 3 \cdot 2^{k-1} \ (k \geqq 1) \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_k = a_{k-2} + 2a_{k-3} + 3a_{k-4} + \cdots + (k-1)a_0 \end{cases}$