括弧の括り方の類題

問題

次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{n+1}{n-1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k \ a_{n-k} \quad (n \geqq 2) \end{cases} \tag{1}$$

解答

(1)　$\{a_n\}$ の母関数

$y = f(x) = 0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ とおく。

$$
\begin{aligned}
y &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\
y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \\
xy' - y &= 1a_2x^2 + 2a_3x^3 + \cdots + (n-1)a_nx^n + \cdots \\
y^2 &= a_1a_1x^2 + (a_1a_2 + a_2a_1)x^3 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_ka_{n-k}\right)x^n + \cdots \\
&\qquad \left(b_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_ka_{n-k} \text{ とおく}\right) \\
&= b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n + \cdots \\
x(y^2)' + y^2 &= 3b_2x^2 + 4b_3x^3 + \cdots + (n+1)b_nx^n + \cdots \\
&\qquad \big((n-1)a_n = (n+1)b_n \text{ だから}\big) \\
&= xy' - y
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
&2xyy' + y^2 = xy' - y \\
&y + y^2 = (1-2y)xy' \\
&\frac{1}{x} = \frac{1-2y}{y(1+y)}y' = \frac{(1+y)-3y}{y(1+y)}y' = \left(\frac{1}{y} - \frac{3}{1+y}\right)y' \\
&\log x = \log y - 3\log(1+y) + C' = \log\frac{Cy}{(1+y)^3} \\
&x = \frac{Cy}{(1+y)^3} \\
&(1+y)^3 = C\frac{y}{x} \\
&x \to 0 \text{ のとき } y \to 0,\ \frac{y}{x} \to a_1 = 1 \text{ より}, C = 1 \\
&\therefore\ (1+y)^3 = \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

(2)　$\{a_n\}$ が満たす別の漸化式

$a_0 = 1$ を追加する。

$$1 + y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$(1+y)^3 = a_0 a_0 a_0 + (a_0 a_0 a_1 + a_0 a_1 a_0 + a_1 a_0 a_0)x + \cdots + \left(\sum_{i+j+k=n} a_i a_j a_k \right) x^n + \cdots$$

$$\frac{y}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1} + \cdots$$

ゆえに

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \displaystyle\sum_{i+j+k=n-1} a_i a_j a_k \quad (n \geqq 1) \end{cases} \tag{2}$$

(3)　漸化式 (2) を満たす実例

$+2$ と書かれた札 $\boxed{+2}$ が n 枚と，-1 と書かれた札 $\boxed{-1}$ が $2n$ 枚ある。この $3n$ 枚を一列に並べると，${}_{3n}\mathrm{C}_n$ 個の異なる列ができる。できた列を数式とみなして左から順々に計算をしていく。途中の値が負になることなく，最後の 0 に至るような列を n 組の**良い列**といい，良い列の個数を a_n とする。

良い列	$+2$	-1	$+2$	-1	-1	-1	$+2$	-1	-1
計算	$+2$	$+1$	$+3$	$+2$	$+1$	0	$+2$	$+1$	0
悪い列	$+2$	-1	-1	-1	$+2$	$+2$	-1	-1	-1
計算	$+2$	$+1$	0	-1	$+1$	$+3$	$+2$	$+1$	0

- $n = 0$ の場合

  空列

  $a_0 = 1$

- $n = 1$ の場合

$+2$	-1	-1

  $a_1 = 1$

- $n = 2$ の場合

$+2$	-1	-1	$+2$	-1	-1
$+2$	$+1$	0	$+2$	$+1$	0
$+2$	-1	$+2$	-1	-1	-1
$+2$	$+1$	$+3$	$+2$	$+1$	0
$+2$	$+2$	-1	-1	-1	-1
$+2$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0

  $a_2 = 3$

- 一般に $n \geqq 1$ について

まず，一組の $\boxed{+2}\boxed{-1}\boxed{-1}$ を間を空けて置く。$\boxed{+2}$ と $\boxed{-1}$ の間を左ブロック，$\boxed{-1}$ と $\boxed{-1}$ の間を中ブロツク，$\boxed{-1}$ の後を右ブロックと呼ぶことにする。左ブロックに i 組の良い列，中ブロックに j 組の良い列，右ブロツクに k 組の良い列を書くと，全体で $n = i + j + k + 1$ 組の良い列ができる。

$\boxed{+2}$		$\boxed{-1}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$		
$+2$		$+1$	$+3$	$+2$	$+1$	0	$+2$	$+1$	0		
・	↑	・				・					左ブロック (0 組)
・		・	↑	↑	↑	・					中ブロック (1 組)
・		・				・	↑	↑	↑		右ブロツク (1 組)

$\boxed{+2}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$		$\boxed{-1}$		
$+2$	$+4$	$+3$	$+2$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$		0		
・	↑	↑	↑	↑	↑	↑	・		・		左ブロック (2 組)
・							・	↑	・		中ブロック (0 組)
・							・		・	↑	右ブロック (0 組)

計算したとき，はじめに置いた $\boxed{+2}$, $\boxed{-1}$, $\boxed{-1}$ はそれぞれ初めて $+2$，$+1$，0 になる。ゆえに，n 組の良い列が与えられると，左ブロック，中ブロック，右ブロックが一通りに定まる。

したがって

$$a_n = \sum_{i+j+k=n-1} a_i a_j a_k$$

(4) 良い列の個数

$\boxed{-1}$を 1 枚追加して，n 枚の $\boxed{+2}$と $2n+1$ 枚の $\boxed{-1}$を一列に並べると，${}_{3n+1}\mathrm{C}_n$ 通りの列ができる。

前と同じように，左から計算していく。計算した値が最小の札（複数あるときは，そのうち最も左にあるもの）を取り除いて，かつそれより左にある札をすべて最後尾に移すと，良い列が得られる。

$\boxed{-1}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$				
-1	$+1$	0	-1	-2	0	$+2$	$+1$	0	-1				
					$\boxed{+2}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$
					$+2$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0	$+2$	$+1$	0

$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	
-1	-2	0	-1	-2	0	$+2$	$+1$	0	-1	
		$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{+2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$
		$+2$	$+1$	0	$+2$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0

その他の札を取り除いて，それより左にある札をすべて最後尾に移してできる列は，どれも良い列にならない。このように，1 つの列から，1 個の n 組の良い列と，$3n$ 個の悪い列が得られる。ゆえに，良い列の個数は

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{{}_{3n+1}\mathrm{C}_n}{3n+1} \\
&\quad \text{(次のようにも表せる)} \\
&= \frac{(3n+1)!}{n!\,(2n+1)!\,(3n+1)} \\
&= \frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{2n+1} \\
&= \frac{{}_{3n}\mathrm{C}_{n-1}}{n}
\end{aligned}
$$