問題

自然数 n に対して、$\sqrt{2n-1}$ の整数部分を a_n とする。

$M=2(2+4+6+\cdots+2n)$ とするとき、$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{M} 2^{a_k}$ を n を用いて表せ。

解答

$$m=\left[\sqrt{2n-1}\right] \iff m \leqq \sqrt{2n-1} < m+1 \iff m^2 \leqq 2n-1 < m^2+2m+1$$

m が奇数のとき，

$$2n-1=m^2, m^2+2, \cdots, m^2+2m \ (m+1 \text{ 個})$$

m が偶数のとき

$$2n-1=m^2+1, m^2+3, \ldots, m^2+2m-1 \ (m \text{ 個})$$

ゆえに，$\left\{a_k \mid k \leqq M\right\}$ は，

$$1,1,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,\cdots\cdots, \underbrace{2n-1,\cdots,2n-1}_{2n \text{ 個}}, \underbrace{2n,\cdots,2n}_{2n \text{ 個}}$$

$b_k=\underbrace{2^{2k-1}+\cdots+2^{2k-1}}_{2k \text{ 個}}+\underbrace{2^{2k}+\cdots+2^{2k}}_{2k \text{ 個}}$ とおく．

$$b_k=2k\left(2^{k-1}+2^k\right)=6k2^{k-1}$$

$$\therefore\ S=6\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}=6(1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}) \qquad \cdots ①$$

$$2S=6(1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n) \qquad \cdots ②$$

① − ② より

$$S=-6(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n)=-6\left(\frac{2^n-1}{2-1}-n\cdot 2^n\right)$$
$$=6\left((n-1)2^n+1\right)$$

別解　（①まで同じ）

$$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n \qquad \text{とおくと}$$
$$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots nx^{n-1}$$

また

$$f(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$
$$f'(x)=\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)\cdot 1}{(x-1)^2}$$
$$\therefore\ S=6f'(2)=6\cdot\frac{(n+1)2^n\cdot 1-(2^{n+1}-1)}{1}=6\left((n+1)2^n-2\cdot 2^n+1\right)$$
$$=6\left((n-1)2^n+1\right)$$