

1 2直線の交点の軌跡

問題 1.1 m がすべての実数値をとるとき, 2直線

$$mx - y + 2m = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + my - 1 - 5m = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

の交点の軌跡を求めよ.

解答 1.1

$$\textcircled{1} : \quad m(x+2) - y = 0 \quad \dots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} : \quad x - 1 + m(y-5) = 0 \quad \dots \textcircled{2}'$$

$$\textcircled{1}' \times (y-5) : \quad m(x+2)(y-5) - y(y-5) = 0 \quad \dots \textcircled{1}''$$

$$\textcircled{2}' \times (x+2) : \quad (x+2)(x-1) + m(x+2)(y-5) = 0 \quad \dots \textcircled{2}''$$

$$\textcircled{2}'' - \textcircled{1}'' : \quad (x+2)(x-1) + y(y-5) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

これが軌跡の方程式で, 2線分 $A(-2,0)B(1,5), C(-2,5)D(1,0)$ を直径にもつ円 (長方形 $ADBC$ の外接円) である.

注 $x+2=0$ かつ $y-5=0$ (すなわち, $(x,y) = (-2,5)$) のとき, $\textcircled{1}''$, $\textcircled{2}''$ は $\textcircled{1}'$, $\textcircled{2}'$ に関係なく成り立つ. だから, この点に関しては直接 $\textcircled{1}'$, $\textcircled{2}'$ を満たす m があるかどうかチェックしないとイケない.

解答続き $(x,y) = (-2,5)$ は $\textcircled{1}'$ を満たす m が存在しないから, 軌跡に含まれない.

答 軌跡は, 円 $\textcircled{3}$ の点 $C(-2,5)$ 以外の部分である.

解答 1.2

$$\textcircled{1} : \quad m(x+2) - y = 0 \quad \dots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} : \quad x - 1 + m(y - 5) = 0 \quad \dots \textcircled{2}'$$

$\textcircled{1}'$ は点 $A(-2, 0)$ を通り、傾きが m の直線 ($x = -2$ は表せない)

$\textcircled{2}'$ は点 $B(1, 5)$ を通り、 $\textcircled{1}'$ と直交する直線 ($y = 5$ は表せない)

ゆえに、交点 $P(x, y)$ は AB を直径とする円

$$(x+2)(x-1) + y(y-5) = 0 \dots \textcircled{3}$$

を描く.

ただし、点 $C(-2, 5)$ は、そこ通る $\textcircled{1}'$ がないから除かれる.

解答 1.3

$$\begin{aligned} \textcircled{1} : & \quad m(x+2) - y = 0 & \dots \textcircled{1}' \\ \textcircled{2} : & \quad x - 1 + m(y-5) = 0 & \dots \textcircled{2}' \\ \textcircled{1}' \text{ より} : & \quad m = \frac{y}{x+2} & \dots \textcircled{2}'' \\ \textcircled{2}' \text{ に代入} : & \quad x - 1 + \frac{y}{x+2}(y-5) = 0 \\ \text{ゆえに} & \quad (x+2)(x-1) + y(y-5) = 0 & \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

これが軌跡の方程式で、2線分 A(-2,0)B(1,5), C(-2,5)D(1,0) を直径にもつ円（長方形 AD BC の外接円）である。

注 $\textcircled{2}''$ のところで、分母の条件より、 $x+2 \neq 0$ における部分解答です。 $x = -2$ の場合を別途示さなければいけません。

解答続き

円 $\textcircled{3}$ 上の、 $x = -2$ の点についてしらべる。

(1)A(-2,0) について

$\textcircled{1}'$ を満たし、

$\textcircled{2}'$ より $m = -\frac{3}{5}$ が存在する

よって、軌跡に含まれる

(2)C(-2,5) について

$\textcircled{1}'$ を満たさない

よって、軌跡に含まれない

答 軌跡は、円 $\textcircled{3}$ の点 C(-2,5) 以外の部分である。

解答 1.4

注 あまりよくない解答です（途中で躓く）が、やりがちです。

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \times m + \textcircled{2} &: (m^2 + 1)x + 2m^2 - 5m - 1 = 0 \\ \therefore x &= \frac{-2m^2 + 5m + 1}{m^2 + 1} = -2 + \frac{5m + 3}{m^2 + 1} && \dots \textcircled{3} \\ x + 2 &= \frac{5m + 3}{m^2 + 1} && \dots \textcircled{3}' \\ \textcircled{2} \times m - \textcircled{1} &: (m^2 + 1)y - 5m^2 - 3m = 0 \\ \therefore y &= \frac{5m^2 + 3m}{m^2 + 1} = 5 + \frac{3m - 5}{m^2 + 1} && \dots \textcircled{4} \\ y - 5 &= \frac{3m - 5}{m^2 + 1} && \dots \textcircled{4}'\end{aligned}$$

注 媒介変数表示が得られましたが、媒介変数を消去しなくてはなりません。

解答続き

$$\begin{aligned}\textcircled{3}'^2 + \textcircled{4}'^2 &: (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = \frac{34(m^2 + 1)}{(m^2 + 1)^2} = \frac{34}{m^2 + 1} && \dots \textcircled{5} \\ \textcircled{3} \times 3 - \textcircled{4} \times 5 &: 3(x + 2) - 5(y - 5) = \frac{34}{m^2 + 1} && \dots \textcircled{6} \\ \textcircled{5} - \textcircled{6} &: (x + 2)(x - 1) + (y - 5)y = 0 && \dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

これが軌跡の方程式で、2線分 A(-2, 0)B(1, 5), C(-2, 5)D(1, 0) を直径にもつ円（長方形 ADBC の外接円）である。

注 軌跡の方程式が得られましたが、除外点があるか、わかりにくいです。③, ④ で $m \rightarrow \infty$ として得られる $(x, y) = (-2, 5)$ が除外点です。

解答続き

③', ④' を同時に 0 にする実数 m がないので、点 $(-2, 5)$ は含まれない

答 軌跡は、円 ⑦ の点 C(-2, 5) 以外の部分である。