1　楕円と回転楕円体

1.1　楕円

1.1.1　直交座標での標準形

2 つの**焦点** $\mathrm{F}(c,0)$,$\mathrm{F}'(-c,0)$ からの距離の和 $\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'$ が一定値 $2a$ $(a>c)$ であるような点 $\mathrm{P}(x,y)$ の軌跡が楕円である。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a\\
&\mathrm{PF}^2+2\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF}'+\mathrm{PF}'^2=4a^2\\
&2\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF}'=4a^2-\mathrm{PF}^2-\mathrm{PF}'^2\\
&4\mathrm{PF}^2\cdot\mathrm{PF}'^2=16a^4-8a^2\left(\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2\right)+\left(\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2\right)^2\\
&0=16a^4-8a^2\left(\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2\right)+\left(\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2\right)^2-4\mathrm{PF}^2\cdot\mathrm{PF}'^2\\
&\quad=16a^4-8a^2\left(\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2\right)+\left(\mathrm{PF}^2-\mathrm{PF}'^2\right)^2\\
&\quad=16a^4-8a^2\left((x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2\right)+\left((x-c)^2+y^2-(x+c)^2-y^2\right)^2\\
&\quad=16a^4-16a^2(x^2+c^2+y^2)+(-4cx)^2\\
&\quad=16(a^4-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2+c^2x^2)\\
&\quad=16\left(a^2(a^2-c^2)-(a^2-c^2)x^2-a^2y^2\right)\\
&\quad=16(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)\qquad\qquad\left(b^2=a^2-c^2\quad\text{とおいた}\right)\\
&\quad=16a^2b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\\
&\therefore\quad\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\qquad\cdots\cdots①
\end{aligned}
$$

1.1.2　極座標での標準形

焦点 $\mathrm{O}(0,0)$ からの距離 OP と**準線** ℓ: $x=-k$ からの距離 PH （H は P から直線 ℓ に下ろした垂線の足）の比 $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$ が一定値 e $(0<e<1)$ であるような点 $\mathrm{P}(r,\theta)$ の軌跡が楕円である。e を**離心率**という。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{OP}=e\mathrm{PH}\\
&r=e(r\cos\theta+k)\\
&r(1-e\cos\theta)=ke\\
&\therefore\quad r=\frac{ke}{1-e\cos\theta}\qquad\cdots\cdots②
\end{aligned}
$$

1.1.3　両者の関係

直交座標における楕円 ① を，左の焦点 F$'$ を極とする極座標で表す。

$$
\begin{aligned}
&x = r\cos\theta - c\\
&y = r\sin\theta\\
&b^2(r\cos\theta - c)^2 + a^2(r\sin\theta)^2 = a^2b^2\\
&(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)r^2 - 2b^2c\cos\theta\ r + b^2c^2 - a^2b^2 = 0\\
&\bigl(a^2 - (a^2-b^2)\cos^2\theta\bigr)\,r^2 - 2b^2c\cos\theta\ r - (a^2-c^2)b^2 = 0\\
&\bigl(a^2 - c^2\cos^2\theta\bigr)\,r^2 - 2b^2c\cos\theta\ r - b^4 = 0\\
&\bigl((a + c\cos\theta)r + b^2\bigr)\bigl((a - c\cos\theta)r - b^2\bigr) = 0\\
&(a - c\cos\theta)r - b^2 = 0\\
&\therefore\quad r = \frac{b^2}{a - c\cos\theta}r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta} \qquad\qquad \Bigl(e = \frac{c}{a},\, k = \frac{b^2}{c}\quad \text{とおいた}\Bigr)
\end{aligned}
$$

1.1.4　接線

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線。

$$
\begin{aligned}
&b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2\\
&2b^2x + 2a^2yy' = 0\\
&\therefore\ y' = -\frac{b^2x}{a^2y}
\end{aligned}
$$

P における接線は

$$
\begin{aligned}
&y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0) + y_0\\
&b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2\\
&\therefore\quad \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1 \qquad \cdots\cdots ③
\end{aligned}
$$

1.1.5 焦点から出た光

楕円の１つの焦点 F から出た光は楕円上の点 P で反射した後，もう１つの焦点 F′ に進む。すなわち，P における法線（接線と垂直な線）n が $\angle \mathrm{FPF'}$ の二等分線になっている。

これを示すには，直線 FP，F′P，法線 n が x 軸の正方向となす角を α,β,θとしたとき，$2\theta=\alpha+\beta$ を示せばよい。

$$\tan\alpha=\frac{y}{x-c},\quad \tan\beta=\frac{y}{x+c},\quad \tan\theta=\frac{a^2y}{b^2x}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{y}{x-c}+\dfrac{y}{x+c}}{1-\dfrac{y}{x-c}\cdot\dfrac{y}{x+c}}=\frac{(x+c)y+(x-c)y}{(x-c)(x+c)-y^2}=\frac{2xy}{x^2-y^2-c^2}$$

$$\begin{aligned}\tan 2\theta&=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\dfrac{a^2y}{b^2x}}{1-\left(\dfrac{a^2y}{b^2x}\right)^2}=\frac{2xy}{\dfrac{b^2x^2}{a^2}-\dfrac{a^2y^2}{b^2}}=\frac{2xy}{b^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-a^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}\\&=\frac{2xy}{b^2-y^2-a^2+x^2}=\frac{2xy}{x^2-y^2-c^2}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 2\theta=\alpha+\beta$$

1.2 回転楕円体

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ を座標軸のまわりに回転してできる回転楕円体の体積と表面積。

1.2.1 体積

x 軸のまわりに回転した場合

$$\begin{aligned}V_x&=2\int_0^a \pi y^2\,dx\\&=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,dx\\&=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[\,a^2x-\frac{x^3}{3}\,\right]_0^a dx\\&=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)\\&=\frac{4}{3}\pi ab^2\end{aligned}$$

y 軸のまわりに回転した場合

$$\begin{aligned}V_y&=2\int_0^b \pi x^2\,dy\\&=2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b(b^2-y^2)\,dy\\&=2\pi\frac{a^2}{b^2}\left[\,b^2y-\frac{y^3}{3}\,\right]_0^b dy\\&=2\pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^3-\frac{b^3}{3}\right)\\&=\frac{4}{3}\pi a^2b\end{aligned}$$

1.2.2 表面積

x 軸のまわりに回転した場合

$$
\begin{aligned}
S_x &= 2\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\ dx \\
&= 4\pi b\int_0^a \sqrt{\frac{y^2}{b^2}+\left(\frac{yy'}{b}\right)^2}\ dx \\
&= 4\pi b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\left(-\frac{bx}{a^2}\right)^2}\ dx \\
&= 4\pi b\int_0^a \sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^4}x^2}\ dx \\
&= 4\pi b\int_0^a \sqrt{1-\frac{c^2}{a^4}x^2}\ dx \\
&\quad \left(\frac{c}{a^2}x=\sin\theta \quad \text{とおく}\right) \\
&= 4\pi b\int_0^\alpha \sqrt{1-\sin^2\theta}\ \frac{a^2}{c}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{2\pi a^2 b}{c}\int_0^\alpha 2\cos^2\theta\ d\theta \\
&= \frac{2\pi a^2 b}{c}\int_0^\alpha (1+\cos 2\theta)\ d\theta \\
&= \frac{2\pi a^2 b}{c}\left[\ \theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\ \right]_0^\alpha \\
&= \frac{2\pi a^2 b}{c}(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha) \\
&= \frac{2\pi a^2 b}{c}\left(\sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)+\frac{c}{a}\frac{b}{a}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{a^2 b}{c}\sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)+b^2\right)
\end{aligned}
$$

y 軸のまわりに回転した場合

$$
\begin{aligned}
S_y &= 2\int_0^b 2\pi x\sqrt{1+(x')^2}\ dy \\
&= 4\pi a\int_0^b \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{xx'}{a}\right)^2}\ dy \\
&= 4\pi a\int_0^b \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}+\left(-\frac{ay}{b^2}\right)^2}\ dy \\
&= 4\pi a\int_0^b \sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}y^2}\ dy \\
&= 4\pi a\int_0^b \sqrt{1+\frac{c^2}{b^4}y^2}\ dy \\
&\quad \left(\frac{c}{b^2}y=\sinh\theta \quad \text{とおく}\right) \\
&= 4\pi a\int_0^\alpha \sqrt{1+\sinh^2\theta}\ \frac{b^2}{c}\cosh\theta d\theta \\
&= \frac{2\pi ab^2}{c}\int_0^\alpha 2\cosh^2\theta\ d\theta \\
&= \frac{2\pi ab^2}{c}\int_0^\alpha (1+\cosh 2\theta)\ d\theta \\
&= \frac{2\pi ab^2}{c}\left[\ \theta+\frac{\sinh 2\theta}{2}\ \right]_0^\alpha \\
&= \frac{2\pi ab^2}{c}(\alpha+\sinh\alpha\cosh\alpha) \\
&= \frac{2\pi ab^2}{c}\left(\sinh^{-1}\left(\frac{c}{b}\right)+\frac{c}{b}\frac{a}{b}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{ab^2}{c}\sinh^{-1}\left(\frac{c}{b}\right)+a^2\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{ab^2}{2c}\log\frac{a+c}{a-c}+a^2\right)
\end{aligned}
$$