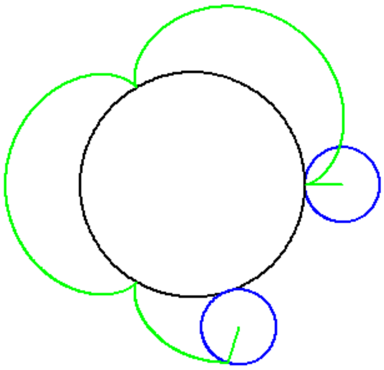
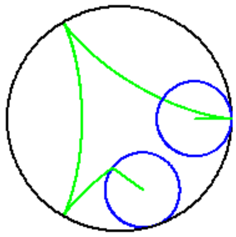
円サイクロイド

　定円の周にそって外側（または内側）を動円が転がるとき，動円の周上の一点が描く軌跡を，**外サイクロイド (epicycloid)**（または**内サイクロイド (hypocycloid)**）という。





問題 1 定円の半径 R が動円の半径 r の n 倍のとき，定円のまわりを一周する間に動円は何回転するか。

解答 外サイクロイドの場合，動円の中心は半径 $R+r = (n+1)r$ の円周を動く。ゆえに，$2\pi(n+1)r$ だけ移動する。一回転すると $2\pi r$ だけ移動するから，一周すると $(n+1)$ 回転する。なお，回転方向は周回方向と同じである。

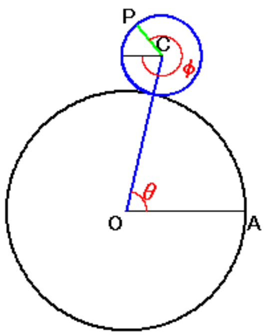
　内サイクロイドの場合，$(n-1)$ 回転する。回転方向は周回方向の逆である。

注 1 動円を転がさないで滑らせる，すなわち P で常に接しているように，定円のまわりを一周するだけで，動円は 1 回転する．

問題 2 それぞれの方程式の媒介変数表示を求めなさい。

解答 定円の中心を原点 O，半径を R，動円の中心を C，半径を r とする。初め，2 つの円は x 軸上の点 A$(R, 0)$ で接していて，軌跡を調べる動円上の点 P(x, y) はこの接点にあるとする。
動円が $\theta = \angle \mathrm{AOC}$ の位置まで移動する間に，回転した角を ϕ とおく。

外サイクロイド

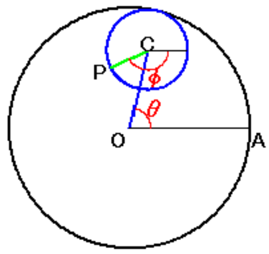


$$\phi = \frac{R}{r}\theta + \theta = \frac{R+r}{r}\theta$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (R+r)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \cos(\pi+\phi) \\ \sin(\pi+\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R+r)\cos\theta - r\cos\dfrac{R+r}{r}\theta \\ (R+r)\sin\theta - r\sin\dfrac{R+r}{r}\theta \end{pmatrix}$$

内サイクロイド



$$\phi = \frac{R}{r}\theta - \theta = \frac{R-r}{r}\theta$$

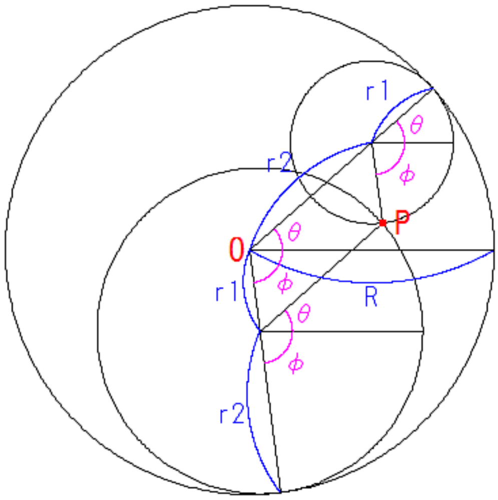
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (R-r)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \cos(-\phi) \\ \sin(-\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R-r)\cos\theta + r\cos\dfrac{R-r}{r}\theta \\ (R-r)\sin\theta - r\sin\dfrac{R-r}{r}\theta \end{pmatrix}$$

注 2 外サイクロイドの式の r を $-r$ で置き換えると，内サイクロイドの式と同値になる。

問題 3 半径が r_1 の動円 C_1 が描く内サイクロイドと，半径が $r_2 = R - r_1$ の動円 C_2 が描く内サイクロイドが一致することを示しなさい。

解答



円 C_1 において

$$r_1(\theta + \phi) = R\theta$$
$$\therefore \quad r_1\phi = (R - r_1)\theta = r_2\theta$$

円 C_2 において

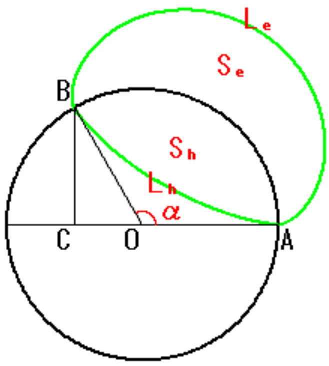
$$r_2(\theta + \phi) = R\phi$$
$$\therefore \quad r_2\theta = (R - r_2)\phi = r_1\phi$$

どちらで考えても

$$\phi = \frac{r_2}{r_1}\theta$$

すなわち，つぎのことがわかる。
最初に円 C_1 と C_2 が定円と点 $\mathrm{A}(R, 0)$ 右端で接していて，その接点を P とする。
円 C_1 が角速度 θ で定円の内側を反時計回りに転がるとき，円 C_2 を角速度 $\phi = \dfrac{r_2}{r_1}\theta$ で時計回りに転がすと，両者の点 P は常に一致して動く。

問題 4 半径 R の定円の周に沿って，半径 r の動円が描く，円サイクロイドについて，点 $\mathrm{P}(x, y)$ が，$\mathrm{A}(R, 0)$ で定円に接してから再び定円に接する点を $\mathrm{B}(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ とする．



内サイクロイド

$$\begin{cases} x_h = (R-r)\cos\theta + r\cos\dfrac{R-r}{r}\theta \\ y_h = (R-r)\sin\theta - r\sin\dfrac{R-r}{r}\theta \end{cases}$$

外サイクロイド

$$\begin{cases} x_e = (R+r)\cos\theta - r\cos\dfrac{R+r}{r}\theta \\ y_e = (R+r)\sin\theta - r\sin\dfrac{R+r}{r}\theta \end{cases}$$

(1) α を求めなさい．

(2) それぞれ，弧 AB の長さ L_h，L_e を求めなさい．

(3) それぞれ，弧 AB と定円の弧 AB で囲まれた領域の面積 S_h，S_e を求めなさい．

解答 (1)

定円の弧 AB の長さと動円の周の長さが等しくなるときだから，

$$R\alpha = 2\pi r \qquad \therefore\ \alpha = \frac{2r}{R}\pi$$

解答 (2) 内サイクロイド

$$\begin{aligned}
L_h &= \int_0^\alpha \sqrt{\left(\frac{dx_h}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy_h}{d\theta}\right)^2}\ d\theta \\
&= \int_0^\alpha \sqrt{\left(-(R-r)\sin\theta - (R-r)\sin\frac{R-r}{r}\theta\right)^2 + \left((R-r)\cos\theta - (R-r)\cos\frac{R-r}{r}\theta\right)^2}\ d\theta \\
&= (R-r)\int_0^\alpha \sqrt{1 + 2\left(\sin\theta\sin\frac{R-r}{r}\theta - \cos\theta\cos\frac{R-r}{r}\theta\right) + 1}\ d\theta \\
&= (R-r)\int_0^\alpha \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{R}{r}\theta\right)}\ d\theta \\
&= (R-r)\int_0^\alpha \sqrt{4\sin^2\frac{R}{2r}\theta}\ d\theta \qquad \left(t = \frac{R}{2r}\theta \text{ と置換する}\right) \\
&= (R-r)\int_0^\pi \sqrt{4\sin^2 t}\ \frac{2r}{R}dt \\
&= \frac{4(R-r)r}{R}\int_0^\pi \sin t\ dt \\
&= \frac{4(R-r)r}{R}\Big[-\cos t\Big]_0^\pi \\
&= \frac{8(R-r)r}{R}
\end{aligned}$$

解答 (2) 外サイクロイド

$$
\begin{aligned}
L_e &= \int_0^{\alpha} \sqrt{\left(\frac{dx_e}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy_e}{d\theta}\right)^2}\ d\theta \\
&= \int_0^{\alpha} \sqrt{\left(-(R+r)\sin\theta + (R+r)\sin\frac{R+r}{r}\theta\right)^2 + \left((R+r)\cos\theta - (R+r)\cos\frac{R+r}{r}\theta\right)^2}\ d\theta \\
&= (R+r)\int_0^{\alpha} \sqrt{1 - 2\left(\sin\theta\sin\frac{R+r}{r}\theta + \cos\theta\cos\frac{R+r}{r}\theta\right) + 1}\ d\theta \\
&= (R+r)\int_0^{\alpha} \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{R}{r}\theta\right)}\ d\theta \\
&= (R+r)\int_0^{\alpha} \sqrt{4\sin^2\frac{R}{2r}\theta}\ d\theta \qquad \left(t = \frac{R}{2r}\theta \ \text{ と置換する}\right) \\
&= (R+r)\int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2 t}\ \frac{2r}{R}dt \\
&= \frac{4(R+r)r}{R}\int_0^{\pi} \sin t\ dt \\
&= \frac{4(R+r)r}{R}\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{8(R+r)r}{R}
\end{aligned}
$$

解答 (3) 準備 線分 BC（$x=\cos\alpha$）と x 軸と曲線で囲まれる図形の面積を，つぎのように定める．

$S_0 =$ 定円の円弧 AB とで囲まれる図形の面積

$S_1 =$ 内サイクロイドの弧 AB とで囲まれる図形の面積

$S_2 =$ 外サイクロイドの弧 AB とで囲まれる図形の面積

こう定めると，

$$S_0 = \frac{1}{2}R^2\alpha - \frac{1}{2}R\cos\alpha R\sin\alpha = \frac{1}{2}R^2\alpha - \frac{1}{4}R^2\sin 2\alpha = Rr\pi - \frac{R^2}{4}\sin\frac{4r\pi}{R}$$

$$S_h = S_0 - S_1$$

$$S_e = S_2 - S_0$$

である．

解答 (3) 内サイクロイド

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{\cos\alpha}^{R} y_h\,dx_h \\
&= \int_{\alpha}^{0} y_h\,\frac{dx_h}{d\theta}d\theta = \int_{0}^{\alpha} y_h\,\left(-\frac{dx_h}{d\theta}\right)d\theta \\
&= \int_0^{\alpha}\left((R-r)\sin\theta - r\sin\frac{R-r}{r}\theta\right)\left((R-r)\sin\theta + (R-r)\sin\frac{R-r}{r}\theta\right)d\theta \\
&= (R-r)\int_0^{\alpha}\left((R-r)\sin\theta - r\sin\frac{R-r}{r}\theta\right)\left(\sin\theta + \sin\frac{R-r}{r}\theta\right)d\theta \\
&= (R-r)\int_0^{\alpha}\left((R-r)\sin^2\theta - r\sin^2\frac{R-r}{r}\theta + (R-2r)\sin\theta\sin\frac{R-r}{r}\theta\right)d\theta \\
&= (R-r)\int_0^{\alpha}\left(\frac{R-r}{2}(1-\cos 2\theta) - \frac{r}{2}\left(1-\cos\frac{2(R-r)}{r}\theta\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{R-2r}{2}\left(\cos\frac{R}{r}\theta - \cos\frac{R-2r}{r}\theta\right)\right)d\theta \\
&= (R-r)\left[\frac{R-r}{2}\theta - \frac{R-r}{4}\sin 2\theta - \frac{r}{2}\theta + \frac{r^2}{4(R-r)}\sin\frac{2(R-r)}{r}\theta\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{r(R-2r)}{2R}\sin\frac{R}{r}\theta + \frac{r}{2}\sin\frac{R-2r}{r}\theta\right]_0^{\alpha} \\
&= (R-r)\left(\frac{(R-2r)r}{R}\pi - \frac{R-r}{4}\sin\frac{4r}{R}\pi + \frac{r^2}{4(R-r)}\sin\frac{4(R-r)}{R}\pi\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{r(R-2r)}{2R}\sin 2\pi + \frac{r}{2}\sin\frac{2(R-2r)}{R}\pi\right) \\
&= (R-r)\left(\frac{(R-2r)r}{R}\pi - \frac{R-r}{4}\sin\frac{4r}{R}\pi + \frac{r^2}{4(R-r)}\sin\frac{-4r}{R}\pi + \frac{r}{2}\sin\frac{-4r}{R}\pi\right) \\
&= \frac{(R-r)(R-2r)r}{R}\pi - \frac{(R-r)^2 + r^2 + 2r(R-r)}{4}\sin\frac{4r}{R}\pi \\
&= \frac{(R^2-3Rr+2r^2)r}{R}\pi - \frac{R^2}{4}\sin\frac{4r}{R}\pi
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad S_h = \frac{(3R-2r)r^2}{R}\pi$$

解答 (3) 外サイクロイド

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_0^{\alpha} \left((R+r)\sin\theta - r\sin\frac{R+r}{r}\theta \right) \left((R+r)\sin\theta - (R+r)\sin\frac{R+r}{r}\theta \right) d\theta \\
&= (R+r)\int_0^{\alpha} \left((R+r)\sin\theta - r\sin\frac{R+r}{r}\theta \right) \left(\sin\theta - \sin\frac{R+r}{r}\theta \right) d\theta \\
&= (R+r)\int_0^{\alpha} \left((R+r)\sin^2\theta + r\sin^2\frac{R+r}{r}\theta - (R+2r)\sin\theta\sin\frac{R+r}{r}\theta \right) d\theta \\
&= (R+r)\int_0^{\alpha} \left(\frac{R+r}{2}(1-\cos 2\theta) + \frac{r}{2}\left(1-\cos\frac{2(R+r)}{r}\theta\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{R+2r}{2}\left(\cos\frac{R+2r}{r}\theta - \cos\frac{R}{r}\theta\right)\right) d\theta \\
&= (R+r)\left[\frac{R+r}{2}\theta - \frac{R+r}{4}\sin 2\theta + \frac{r}{2}\theta - \frac{r^2}{4(R+r)}\sin\frac{2(R+r)}{r}\theta \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{r}{2}\sin\frac{R+2r}{r}\theta - \frac{r(R+2r)}{2R}\sin\frac{R}{r}\theta \right]_0^{\alpha} \\
&= (R+r)\left(\frac{(R+2r)r}{R}\pi - \frac{R+r}{4}\sin\frac{4r}{R}\pi - \frac{r^2}{4(R+r)}\sin\frac{4(R+r)}{R}\pi \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{r}{2}\sin\frac{2(R+2r)}{R}\pi - \frac{r(R+2r)}{2R}\sin 2\pi \right) \\
&= (R+r)\left(\frac{(R+2r)r}{R}\pi - \frac{R+r}{4}\sin\frac{4r}{R}\pi - \frac{r^2}{4(R+r)}\sin\frac{4r}{R}\pi + \frac{r}{2}\sin\frac{4r}{R}\pi \right) \\
&= \frac{(R+r)(R+2r)r}{R}\pi - \frac{(R+r)^2 + r^2 + 2r(R+r)}{4}\sin\frac{4r}{R}\pi \\
&= \frac{(R^2+3Rr+2r^2)r}{R}\pi - \frac{R^2}{4}\sin\frac{4r}{R}\pi
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad S_e = \frac{(3R+2r)r^2}{R}\pi
$$

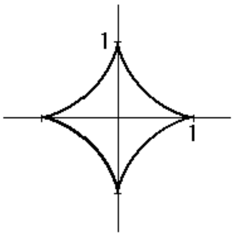
まとめ

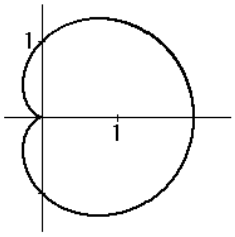
	内サイクロイド	外サイクロイド
弧長	$\dfrac{8(R-r)r}{R}$	$\dfrac{8(R+r)r}{R}$
面積	$\dfrac{(3R-2r)r^2}{R}\pi$	$\dfrac{(3R+2r)r^2}{R}\pi$

問題 5

(1) 定円の半径が 1，動円の半径が $\dfrac{1}{4}$ の内サイクロイド $\begin{cases} x = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta \\ y = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta \end{cases}$ は，アステロイド（星芒形，asteroid）$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ と合同であることを示しなさい．

(2) 定円の半径，動円の半径が共に $\dfrac{1}{2}$ の外サイクロイド $\begin{cases} x = \cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta \\ y = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{cases}$ は，カージオイド（心臓形，cardioid）$r = 1 + \cos t$（極座標表示）と合同（直線 $x = \dfrac{1}{4}$ に関して対称）であることを示しなさい．





解答 (1)

$$x = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = \cos^3\theta$$
$$y = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) = \sin^3\theta$$
$$\therefore \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

解答 (2)

外サイクロイドの θ と，カージオイドの θ は異なるので，外サイクロイドの方を ϕ とする．
曲線 $f(x, y) =$ と $x = a$ に関して対称な曲線は $f(2a - x, y) = 0$ である．

$$x = \frac{1}{2} - \left(\cos\phi - \frac{1}{2}\cos 2\phi\right) = \frac{1}{2} - \cos\phi + \cos^2\phi - \frac{1}{2} = (1 - \cos\phi)(-\cos\phi)$$
$$y = \sin\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi = \sin\phi - \sin\phi\cos\phi = (1 - \cos\phi)\sin\phi$$

$\theta = \pi - \phi$ で書きかえると

$$x = (1 + \cos\theta)\cos\theta$$
$$y = (1 + \cos\theta)\sin\theta$$
$$\therefore \quad r = 1 + \cos\theta$$