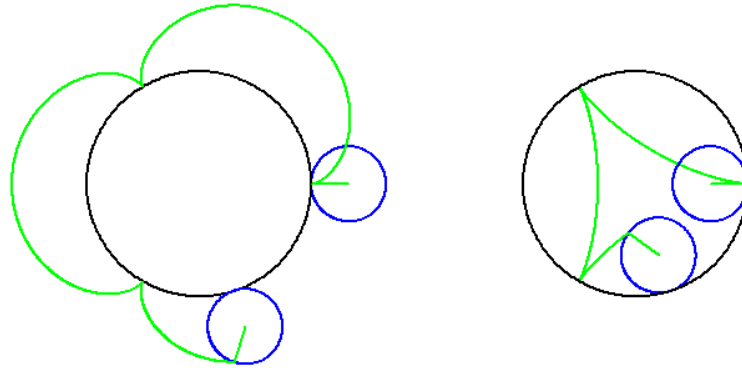


円サイクロイド

定円の周にそって外側（または内側）を動円が転がる時、動円の周上の一点が描く軌跡を、外サイクロイド (epicycloid)（または内サイクロイド (hypocycloid)）という。



問題 1 定円の半径 R が動円の半径 r の n 倍のとき、定円のまわりを一周する間に動円は何回転するか。

解答 外サイクロイドの場合、動円の中心は半径 $R+r = (n+1)r$ の円周を動く。ゆえに、 $2\pi(n+1)r$ だけ移動する。一回転すると $2\pi r$ だけ移動するから、一周すると $(n+1)$ 回転する。なお、回転方向は周回方向と同じである。

内サイクロイドの場合、 $(n-1)$ 回転する。回転方向は周回方向の逆である。

注 1 動円を転がさないで滑らせる、すなわち P で常に接しているように、定円のまわりを一周するだけで、動円は 1 回転する。

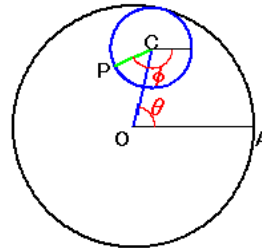
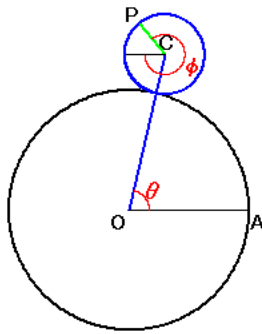
問題 2 それぞれの方程式の媒介変数表示を求めなさい。

解答 定円の中心を原点 O ，半径を R ，動円の中心を C ，半径を r とする。初め，2つの円は x 軸上の点 $A(R, 0)$ で接していて，軌跡を調べる動円上の点 $P(x, y)$ はこの接点にあるとする。

動円が $\theta = \angle AOC$ の位置まで移動する間に，回転した角を ϕ とおく。

外サイクロイド

内サイクロイド



$$\phi = \frac{R}{r}\theta + \theta = \frac{R+r}{r}\theta$$

$$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (R+r) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(\pi + \phi) \\ \sin(\pi + \phi) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (R+r) \cos \theta - r \cos \frac{R+r}{r}\theta \\ (R+r) \sin \theta - r \sin \frac{R+r}{r}\theta \end{pmatrix}$$

$$\phi = \frac{R}{r}\theta - \theta = \frac{R-r}{r}\theta$$

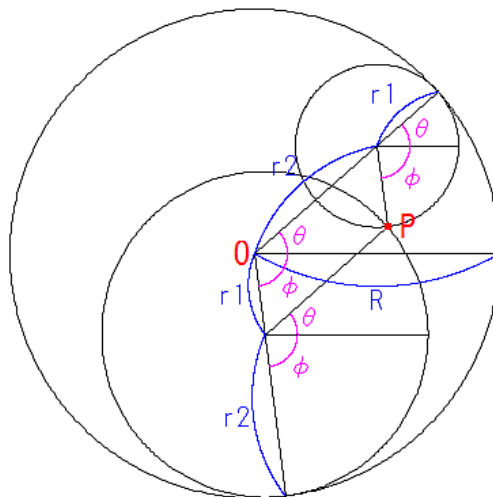
$$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (R-r) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(-\phi) \\ \sin(-\phi) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (R-r) \cos \theta + r \cos \frac{R-r}{r}\theta \\ (R-r) \sin \theta - r \sin \frac{R-r}{r}\theta \end{pmatrix}$$

注 2 外サイクロイドの式の r を $-r$ で置き換えると，内サイクロイドの式と同値になる。

問題 3 半径が r_1 の動円 C_1 が描く内サイクロイドと、半径が $r_2 = R - r_1$ の動円 C_2 が描く内サイクロイドが一致することを示しなさい。

解答



円 C_1 において

$$r_1(\theta + \phi) = R\theta$$

$$\therefore r_1\phi = (R - r_1)\theta = r_2\theta$$

円 C_2 において

$$r_2(\theta + \phi) = R\phi$$

$$\therefore r_2\theta = (R - r_2)\phi = r_1\phi$$

どちらで考えても

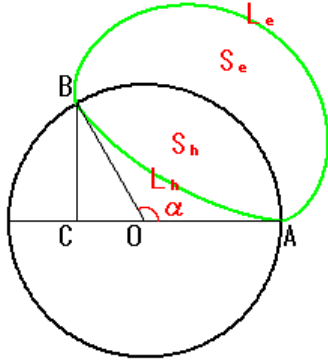
$$\phi = \frac{r_2}{r_1}\theta$$

すなわち、つぎのことがわかる。

最初に円 C_1 と C_2 が定円と点 $A(R, 0)$ 右端で接していて、その接点を P とする。

円 C_1 が角速度 θ で定円の内側を反時計回りに転がるとき、円 C_2 を角速度 $\phi = \frac{r_2}{r_1}\theta$ で時計回りに転がすと、両者の点 P は常に一致して動く。

問題 4 半径 R の定円の周に沿って、半径 r の動円が描く、円サイクロイドについて、点 $P(x, y)$ が、 $A(R, 0)$ で定円に接してから再び定円に接する点を $B(R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ とする。



内サイクロイド

$$\begin{cases} x_h = (R - r) \cos \theta + r \cos \frac{R - r}{r} \theta \\ y_h = (R - r) \sin \theta - r \sin \frac{R - r}{r} \theta \end{cases}$$

外サイクロイド

$$\begin{cases} x_e = (R + r) \cos \theta - r \cos \frac{R + r}{r} \theta \\ y_e = (R + r) \sin \theta - r \sin \frac{R + r}{r} \theta \end{cases}$$

- (1) α を求めなさい。
- (2) それぞれ、弧 AB の長さ L_h , L_e を求めなさい。
- (3) それぞれ、弧 AB と定円の弧 AB で囲まれた領域の面積 S_h , S_e を求めなさい。

解答 (1)

定円の弧 AB の長さと動円の周の長さが等しくなるときだから、

$$R\alpha = 2\pi r \quad \therefore \alpha = \frac{2r}{R}\pi$$

解答 (2) 内サイクロイド

$$\begin{aligned} L_h &= \int_0^\alpha \sqrt{\left(\frac{dx_h}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy_h}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^\alpha \sqrt{\left(- (R - r) \sin \theta - (R - r) \sin \frac{R - r}{r} \theta\right)^2 + \left((R - r) \cos \theta - (R - r) \cos \frac{R - r}{r} \theta\right)^2} d\theta \\ &= (R - r) \int_0^\alpha \sqrt{1 + 2 \left(\sin \theta \sin \frac{R - r}{r} \theta - \cos \theta \cos \frac{R - r}{r} \theta\right) + 1} d\theta \\ &= (R - r) \int_0^\alpha \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{R}{r} \theta\right)} d\theta \\ &= (R - r) \int_0^\alpha \sqrt{4 \sin^2 \frac{R}{2r} \theta} d\theta \quad \left(t = \frac{R}{2r} \theta \text{ と置換する}\right) \\ &= (R - r) \int_0^\pi \sqrt{4 \sin^2 t} \frac{2r}{R} dt \\ &= \frac{4(R - r)r}{R} \int_0^\pi \sin t dt \\ &= \frac{4(R - r)r}{R} \left[-\cos t\right]_0^\pi \\ &= \frac{8(R - r)r}{R} \end{aligned}$$

解答 (2) 外サイクロイド

$$\begin{aligned}
 L_h &= \int_0^\alpha \sqrt{\left(\frac{dx_e}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy_e}{d\theta}\right)^2} d\theta \\
 &= \int_0^\alpha \sqrt{\left(- (R+r) \sin \theta + (R+r) \sin \frac{R+r}{r} \theta\right)^2 + \left((R+r) \cos \theta - (R+r) \cos \frac{R+r}{r} \theta\right)^2} d\theta \\
 &= (R+r) \int_0^\alpha \sqrt{1 - 2 \left(\sin \theta \sin \frac{R+r}{r} \theta + \cos \theta \cos \frac{R+r}{r} \theta\right) + 1} d\theta \\
 &= (R+r) \int_0^\alpha \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{R}{r} \theta\right)} d\theta \\
 &= (R+r) \int_0^\alpha \sqrt{4 \sin^2 \frac{R}{2r} \theta} d\theta \quad \left(t = \frac{R}{2r} \theta \text{ と置換する}\right) \\
 &= (R+r) \int_0^\pi \sqrt{4 \sin^2 t} \frac{2r}{R} dt \\
 &= \frac{4(R+r)r}{R} \int_0^\pi \sin t dt \\
 &= \frac{4(R+r)r}{R} \left[-\cos t \right]_0^\pi \\
 &= \frac{8(R+r)r}{R}
 \end{aligned}$$

解答 (3) 準備 線分 BC ($x = \cos \alpha$) と x 軸と曲線で囲まれる図形の面積を、つぎのように定める.

S_0 = 定円の円弧 AB とで囲まれる図形の面積

S_1 = 内サイクロイドの弧 AB とで囲まれる図形の面積

S_2 = 外サイクロイドの弧 AB とで囲まれる図形の面積

こう定めると,

$$S_0 = \frac{1}{2}R^2\alpha - \frac{1}{2}R \cos \alpha R \sin \alpha = \frac{1}{2}R^2\alpha - \frac{1}{4}R^2 \sin 2\alpha = Rr\pi - \frac{R^2}{4} \sin \frac{4r\pi}{R}$$

$$S_h = S_0 - S_1$$

$$S_e = S_2 - S_0$$

である.

解答 (3) 内サイクロイド

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\cos \alpha}^R y_h dx_h \\ &= \int_{\alpha}^0 y_h \frac{dx_h}{d\theta} d\theta = \int_0^{\alpha} y_h \left(-\frac{dx_h}{d\theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\alpha} \left((R-r) \sin \theta - r \sin \frac{R-r}{r} \theta \right) \left((R-r) \sin \theta + (R-r) \sin \frac{R-r}{r} \theta \right) d\theta \\ &= (R-r) \int_0^{\alpha} \left((R-r) \sin \theta - r \sin \frac{R-r}{r} \theta \right) \left(\sin \theta + \sin \frac{R-r}{r} \theta \right) d\theta \\ &= (R-r) \int_0^{\alpha} \left((R-r) \sin^2 \theta - r \sin^2 \frac{R-r}{r} \theta + (R-2r) \sin \theta \sin \frac{R-r}{r} \theta \right) d\theta \\ &= (R-r) \int_0^{\alpha} \left(\frac{R-r}{2} (1 - \cos 2\theta) - \frac{r}{2} \left(1 - \cos \frac{2(R-r)}{r} \theta \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{R-2r}{2} \left(\cos \frac{R}{r} \theta - \cos \frac{R-2r}{r} \theta \right) \right) d\theta \\ &= (R-r) \left[\frac{R-r}{2} \theta - \frac{R-r}{4} \sin 2\theta - \frac{r}{2} \theta + \frac{r^2}{4(R-r)} \sin \frac{2(R-r)}{r} \theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{r(R-2r)}{2R} \sin \frac{R}{r} \theta + \frac{r}{2} \sin \frac{R-2r}{r} \theta \right]_0^{\alpha} \\ &= (R-r) \left(\frac{(R-2r)r}{R} \pi - \frac{R-r}{4} \sin \frac{4r}{R} \pi + \frac{r^2}{4(R-r)} \sin \frac{4(R-r)}{R} \pi \right. \\ &\quad \left. - \frac{r(R-2r)}{2R} \sin 2\pi + \frac{r}{2} \sin \frac{2(R-2r)}{R} \pi \right) \\ &= (R-r) \left(\frac{(R-2r)r}{R} \pi - \frac{R-r}{4} \sin \frac{4r}{R} \pi + \frac{r^2}{4(R-r)} \sin \frac{-4r}{R} \pi + \frac{r}{2} \sin \frac{-4r}{R} \pi \right) \\ &= \frac{(R-r)(R-2r)r}{R} \pi - \frac{(R-r)^2 + r^2 + 2r(R-r)}{4} \sin \frac{4r}{R} \pi \\ &= \frac{(R^2 - 3Rr + 2r^2)r}{R} \pi - \frac{R^2}{4} \sin \frac{4r}{R} \pi \\ \therefore S_h &= \frac{(3R-2r)r^2}{R} \pi \end{aligned}$$

解答 (3) 外サイクロイド

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \int_0^\alpha \left((R+r) \sin \theta - r \sin \frac{R+r}{r} \theta \right) \left((R+r) \sin \theta - (R+r) \sin \frac{R+r}{r} \theta \right) d\theta \\
 &= (R+r) \int_0^\alpha \left((R+r) \sin \theta - r \sin \frac{R+r}{r} \theta \right) \left(\sin \theta - \sin \frac{R+r}{r} \theta \right) d\theta \\
 &= (R+r) \int_0^\alpha \left((R+r) \sin^2 \theta + r \sin^2 \frac{R+r}{r} \theta - (R+2r) \sin \theta \sin \frac{R+r}{r} \theta \right) d\theta \\
 &= (R+r) \int_0^\alpha \left(\frac{R+r}{2} (1 - \cos 2\theta) + \frac{r}{2} \left(1 - \cos \frac{2(R+r)}{r} \theta \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R+2r}{2} \left(\cos \frac{R+2r}{r} \theta - \cos \frac{R}{r} \theta \right) \right) d\theta \\
 &= (R+r) \left[\frac{R+r}{2} \theta - \frac{R+r}{4} \sin 2\theta + \frac{r}{2} \theta - \frac{r^2}{4(R+r)} \sin \frac{2(R+r)}{r} \theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r}{2} \sin \frac{R+2r}{r} \theta - \frac{r(R+2r)}{2R} \sin \frac{R}{r} \theta \right]_0^\alpha \\
 &= (R+r) \left(\frac{(R+2r)r}{R} \pi - \frac{R+r}{4} \sin \frac{4r}{R} \pi - \frac{r^2}{4(R+r)} \sin \frac{4(R+r)}{R} \pi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r}{2} \sin \frac{2(R+2r)}{R} \pi - \frac{r(R+2r)}{2R} \sin 2\pi \right) \\
 &= (R+r) \left(\frac{(R+2r)r}{R} \pi - \frac{R+r}{4} \sin \frac{4r}{R} \pi - \frac{r^2}{4(R+r)} \sin \frac{4r}{R} \pi + \frac{r}{2} \sin \frac{4r}{R} \pi \right) \\
 &= \frac{(R+r)(R+2r)r}{R} \pi - \frac{(R+r)^2 + r^2 + 2r(R+r)}{4} \sin \frac{4r}{R} \pi \\
 &= \frac{(R^2 + 3Rr + 2r^2)r}{R} \pi - \frac{R^2}{4} \sin \frac{4r}{R} \pi
 \end{aligned}$$

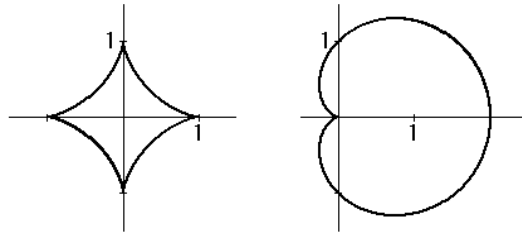
$$\therefore S_e = \frac{(3R+2r)r^2}{R} \pi$$

まとめ

	内サイクロイド	外サイクロイド
弧長	$\frac{8(R-r)r}{R}$	$\frac{8(R+r)r}{R}$
面積	$\frac{(3R-2r)r^2}{R} \pi$	$\frac{(3R+2r)r^2}{R} \pi$

問題 5

- (1) 定円の半径が 1, 動円の半径が $\frac{1}{4}$ の内サイクロイド $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta \\ y = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta \end{cases}$ は,
 アステロイド (星芒形, asteroid) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ と合同であることを示しなさい.
- (2) 定円の半径, 動円の半径が共に $\frac{1}{2}$ の外サイクロイド $\begin{cases} x = \cos \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \\ y = \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{cases}$ は,
 カージオイド (心臓形, cardioid) $r = 1 + \cos t$ (極座標表示) と合同 (直線 $x = \frac{1}{4}$ に関して対称) であることを示しなさい.



解答 (1)

$$x = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) = \cos^3 \theta$$

$$y = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) = \sin^3 \theta$$

$$\therefore x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

解答 (2)

外サイクロイドの θ と, カージオイドの θ は異なるので, 外サイクロイドの方を ϕ とする.
 曲線 $f(x, y) = 0$ と $x = a$ に関して対称な曲線は $f(2a - x, y) = 0$ である.

$$x = \frac{1}{2} - \left(\cos \phi - \frac{1}{2} \cos 2\phi \right) = \frac{1}{2} - \cos \phi + \cos^2 \phi - \frac{1}{2} = (1 - \cos \phi)(-\cos \phi)$$

$$y = \sin \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi = \sin \phi - \sin \phi \cos \phi = (1 - \cos \phi) \sin \phi$$

$\theta = \pi - \phi$ で書きかえると

$$x = (1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$y = (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$\therefore r = 1 + \cos \theta$$