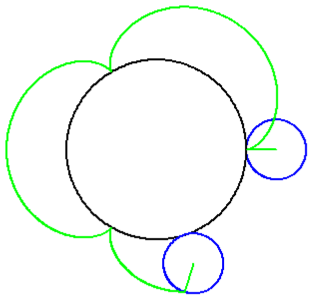
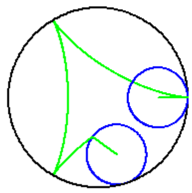
円サイクロイド

定円の周にそって外側（または内側）を動円が転がるとき，動円の周上の一点が描く軌跡を，**外サイクロイド (epicycloid)**（または**内サイクロイド (hypocycloid)**）という。





問題 1 定円の半径 R が動円の半径 r の n 倍のとき，定円のまわりを一周する間に動円は何回転するか。

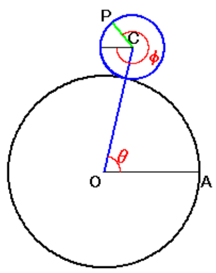
解答 外サイクロイドの場合，動円の中心は半径 $R+r=(n+1)r$ の円周を動く。ゆえに，$2\pi(n+1)r$ だけ移動する。一回転すると $2\pi r$ だけ移動するから，一周すると $(n+1)$ 回転する。なお，回転方向は周回方向と同じである。

内サイクロイドの場合，$(n-1)$ 回転する。回転方向は周回方向の逆である。

問題 2 それぞれの方程式の媒介変数表示を求めなさい。

解答 定円の中心を原点 O，半径を R，動円の中心を C，半径を r とする。初め，2 つの円は x 軸上の点 $\mathrm{A}(R,0)$ で接していて，軌跡を調べる動円上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ はこの接点にあるとする。
動円が $\theta=\angle\mathrm{AOC}$ の位置まで移動する間に，回転した角を ϕ とおく。

外サイクロイド



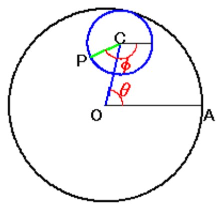
$$\phi=\frac{R+r}{r}\theta \qquad \text{(問題 1 の解答参照)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(R+r)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} \cos(\pi+\phi) \\ \sin(\pi+\phi) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (R+r)\cos\theta-r\cos\dfrac{R+r}{r}\theta \\ (R+r)\sin\theta-r\sin\dfrac{R+r}{r}\theta \end{pmatrix}$$

内サイクロイド



$$\phi=\frac{R-r}{r}\theta$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

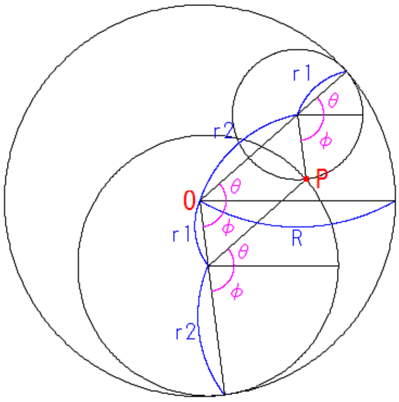
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(R-r)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} \cos(-\phi) \\ \sin(-\phi) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (R-r)\cos\theta+r\cos\dfrac{R-r}{r}\theta \\ (R-r)\sin\theta-r\sin\dfrac{R-r}{r}\theta \end{pmatrix}$$

注 1　外サイクロイドの式の r を $-r$ で置き換えると，内サイクロイドの式と同値になる。

問題 3 半径が $r1$ の動円 C_1 が描く内サイクロイドと，半径が $r2 = R - r1$ の動円 C_2 が描く内サイクロイドが一致することを示せ。

解答



円 C_1 において

$$r_1(\theta + \phi) = R\theta$$
$$\therefore \quad r_1\phi = (R - r_1)\theta = r_2\theta$$

円 C_2 において

$$r_2(\theta + \phi) = R\phi$$
$$\therefore \quad r_2\theta = (R - r_2)\phi = r_1\phi$$

どちらで考えても

$$\phi = \frac{r_2}{r_1}\theta$$

すなわち，つぎのことがわかる。
最初に円 C_1 と C_2 が定円と右端で接していて，その接点を P とする。
円 C_1 が角速度 θ で定円の内側を反時計回りに転がるとき，円 C_2 を角速度 $\phi = \dfrac{r_2}{r_1}\theta$ で時計回りに転がすと，両者の点 P は常に一致して動く。