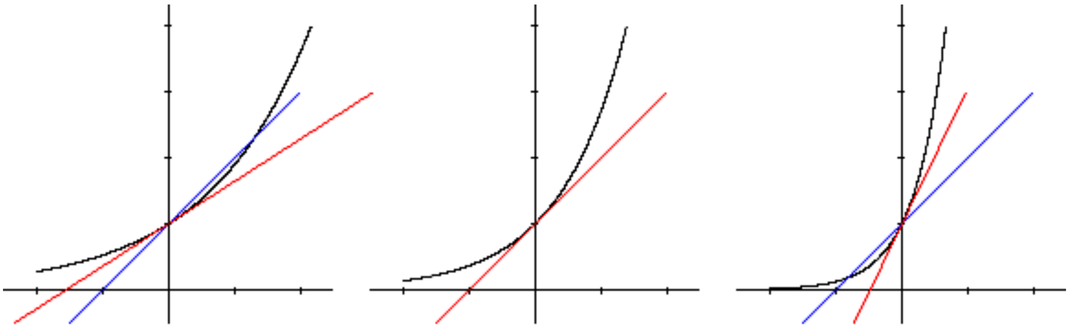
1　指数関数の底 e

1.1　e の定義

指数関数 $y = a^x$ のグラフは，図のようになります（$a > 1$ のとき）.



必ず点 $\mathrm{A}(0, 1)$ を通り，その点における接線（赤線）の傾きは a が大きいほど大きくなります.
接線の傾きが 1 になるような a を特別に e と名付けます.

直線 $y = x + 1$（青線）に注目します.

(1) $1 < a < e$ のとき $y = a^x$ と $y = x + 1$ は，$x > 0$ の交点をもつ.

例　$a = 2$ のとき

$$2^1 = 2 = 1 + 1$$

$\therefore$　$(1, 2)$ で交わる.

(2) $a = e$ のとき，$y = e^x$ と $y = x + 1$ は，A 以外に共有点をもたない.

(3) $e < a$ のとき $y = a^x$ と $y = x + 1$ は，$-1 < x < 0$ の交点をもつ.

例　$a = 4$ のとき

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1$$

$\therefore$　$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で交わる.

1.2 微分を使わない e の定義式

n を自然数（正の整数）とする．

(1) 交点の x 座標が $\dfrac{1}{n}$ となるような a は e より小さい．

$$
\begin{aligned}
& a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} + 1 \\
\therefore \quad & a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
\therefore \quad & e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n
\end{aligned}
$$

(2) 交点の x 座標が $-\dfrac{1}{n+1}$ となるような a は e より大きい[*1]．

$$
\begin{aligned}
& a^{-\frac{1}{n+1}} = -\frac{1}{n+1} + 1 \\
\therefore \quad & a = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-n-1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
\therefore \quad & e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
& \frac{e}{1 + \frac{1}{n}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n
\end{aligned}
$$

(3) (1)(2) より

$$
\frac{e}{1 + \frac{1}{n}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e
$$

$\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ だから

$$
\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e
$$

[*1] $-1 < x < 0$ なので分母は 1 より大きいから $n + 1$ とおいた

1.3　２乗機能がある電卓による計算

加減乗除の他に２乗ができる電卓を使うと，簡単に e の近似値を求められます.

$n = 2^{2^5} = 2^{32}$ のとき

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2^{2^5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^5} = ((((0.5^2)^2)^2)^2)^2$$

なので

(1) $\boxed{0.5}$ を入れる.
$x_1 = 0.5$

(2) $\boxed{２乗}$ を 5 回する.
$x_2 = 0.5^{2^5} = \dfrac{1}{n}$

(3) $\boxed{+1}$ する.
$x_3 = 1 + \dfrac{1}{n}$
結果をメモする（メモリ機能がある電卓ならメモリに入れる）.

(4) $\boxed{２乗}$ を 32 回する（回数を数えなくても，整数部分が 1 から 2 に変わるのでわかる）.
$x_4 = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
e より小さい近似値である.

(5) $\boxed{\times x_3}$ する.
$x_5 = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$
e より大きい近似値である.

(6) $x_4 < e < x_5$ より，e の近似値がわかる.

[注]　「数学のプログラム」のページにある「分数電卓」は２乗機能とメモリ機能があります.

1.4　他の e の定義式との関係

1.4.1

1.2 節で n は自然数としましたが，$y=a^x$ のグラフと直線 $y=x+1$ の交点を考えているので，正の実数 t としても同じことが成り立ちます.

(1)

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

(2)

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \qquad (t=-u-1 \text{ すなわち } u=-t-1 \text{ とおく})\\ =&\lim_{u\to\infty}\left(1-\frac{1}{u+1}\right)^{-u-1}=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{u}{u+1}\right)^{-u-1}=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{u+1}{u}\right)^{u+1}\\ =&\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\left(1+\frac{1}{u}\right)\\ =&e\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to+0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \qquad \left(h=\frac{1}{t} \text{ すなわち } t=\frac{1}{h} \text{ とおく}\right)\\ =&\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\\ =&e\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to-0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \qquad \left(h=\frac{1}{t} \text{ すなわち } t=\frac{1}{h} \text{ とおく}\right)\\ =&\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\\ =&e\end{aligned}$$

(5) (3),(4) より

$$\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

(6)

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{\log_a(1+h)}{h}=\lim_{h\to0}\log_a(1+h)^{\frac{1}{h}}=\log_a e\\ =&\frac{1}{\log_e a}\\ =&1 \qquad (a=e \text{ のとき})\end{aligned}$$

1.4.2

対数関数 $y = f(x) = \log_a x$ の導関数

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a (1 + \frac{h}{x}) \qquad \left(h = xk \text{ すなわち } k = \frac{h}{x} \text{ とおく} \right) \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{1}{kx} \log_a (1+k) \\
&= \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \log_a (1+k) \\
&= \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \log_a (1+k)^{\frac{1}{k}} \\
&= \frac{1}{x} \log_a e \\
&= \frac{1}{x \log_e a} \\
&= \frac{1}{x} \quad (a = e \text{ のとき})
\end{aligned}
$$

1.4.3

指数関数 $y = g(x) = a^x$ の導関数

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\
&= a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \qquad (t = a^h - 1 \text{ すなわち } h = log_a(1+t) \text{ とおく}) \\
&= a^x \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a (1+t)} \\
&= a^x \lim_{t \to 0} \frac{1}{\log_a (1+t)^{\frac{1}{t}}} \\
&= a^x \frac{1}{\log_a e} \\
&= a^x \ \log_e a \\
&= a^x \quad (a = e \text{ のとき})
\end{aligned}
$$