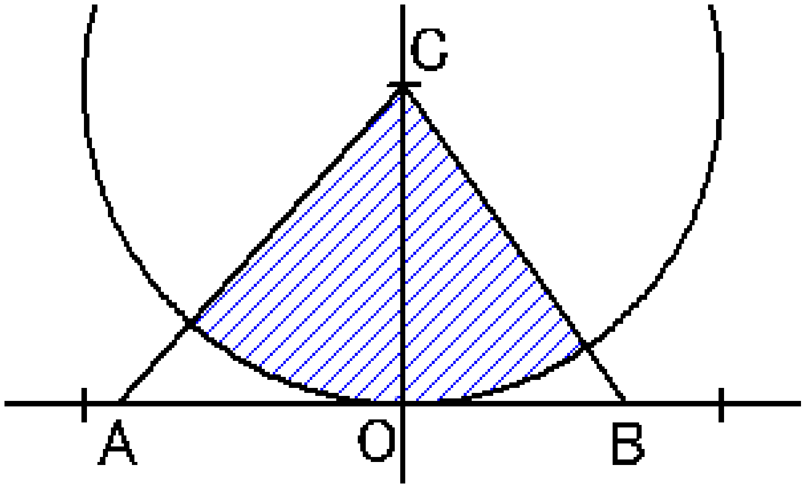
1　円周率を計算する

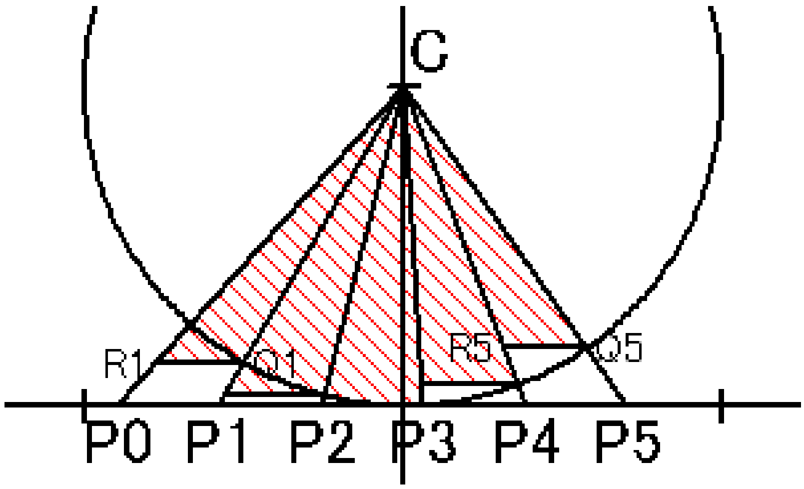
1.1　方針

$a < b$，$\mathrm{A}(a, 0)$，$\mathrm{B}(b, 0)$，$\mathrm{C}(0, 1)$ とする。

中心が C で半径が 1 の円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ の下半分と，CA，CB とで囲まれる扇形の面積 S を考える。



区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分する分点を $\mathrm{P}_0(x_0, 0), \cdots, \mathrm{P}_n(x_n, 0)$ とする。半円と CP_k との交点を Q_k ，Q_k を通り x 軸に平行な直線と CP_{k-1} との交点を R_k とし三角形 $\mathrm{CQ}_k\mathrm{R}_k$ を作る。こうしてできた n 個の三角形の面積の和 S_n によって S を近似する。



1.2　S_n の計算式

区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分する点 P_k の x 座標は

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) \tag{1}$$

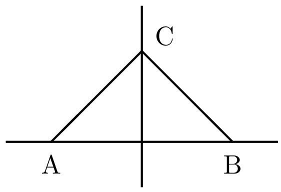
三角形 $\mathrm{CQ}_k\mathrm{R}_k$ と三角形 $\mathrm{CP}_k\mathrm{P}_{k-1}$ は相似なので

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{CQ}_k\mathrm{R}_k &= \triangle\mathrm{CP}_k\mathrm{P}_{k-1} \times \left(\frac{\mathrm{CQ}_k}{\mathrm{CP}_k}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k \cdot \mathrm{OC} \times \frac{\mathrm{CQ}_k^2}{\mathrm{OC}^2 + \mathrm{OP}_k^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{b-a}{n} \cdot 1 \times \frac{1}{1+x_k^2} \qquad (2) \\
\therefore\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} \triangle\mathrm{CQ}_k\mathrm{R}_k \\
&= \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k^2} \qquad (3)
\end{aligned}$$

1.2.1　$a=-1, b=+1$ の場合

$\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ だから

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\pi}{4} \\
\therefore\ \pi &= 4S \fallingdotseq 4S_n \qquad (4)
\end{aligned}$$



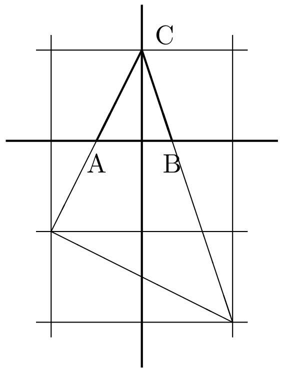
$n = 20$ とすると

$$\begin{aligned}
\pi &\fallingdotseq 4 \cdot \frac{2}{40}\left(\frac{1}{1+(-0.9)^2} + \frac{1}{1+(-0.8)^2} + \cdots \right. \\
&\qquad \left. \cdots + \frac{1}{1+(0.9)^2} + \frac{1}{1+(1.0)^2}\right) \\
&= \left(\frac{2}{1.81} + \frac{2}{1.64} + \frac{2}{1.49} + \frac{2}{1.36} + \frac{2}{1.25} + \frac{2}{1.16}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{2}{1.09} + \frac{2}{1.04} + \frac{2}{1.01} + \frac{1}{1.00} + \frac{1}{2.00}\right) \div 5 \\
&\fallingdotseq 3.1399
\end{aligned}$$

（$\boxed{\mathrm{M+}}$ 機能のある電卓で容易に計算できる）

1.2.2　$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}$ の場合

図のように，3 辺が $\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ の直角二等辺三角形ができるので，$\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ である。ゆえに



$$S = \frac{\pi}{8}$$

$$\therefore\ \pi = 8S \fallingdotseq 8S_n \tag{5}$$

$n=20$ とすると

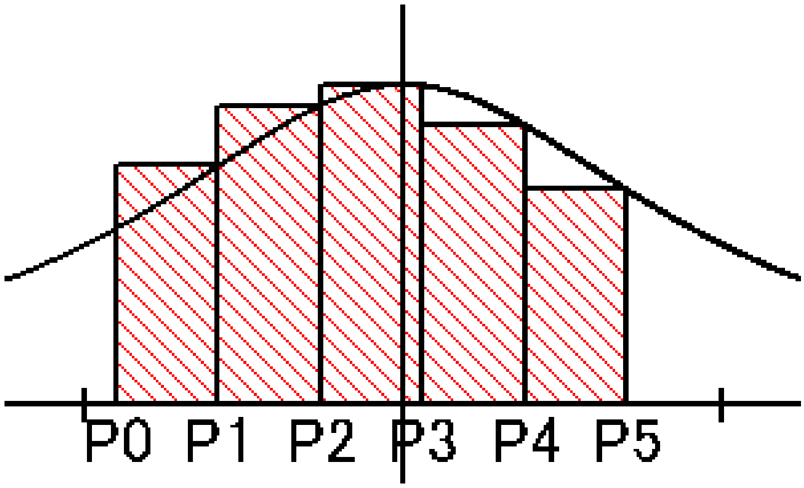
$$\begin{aligned}
\pi &\fallingdotseq 8\cdot\frac{\frac{5}{6}}{40}\left(\frac{1}{1+\left(-\frac{11}{24}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(-\frac{10}{24}\right)^2}+\cdots\right.\\
&\qquad\left.\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{7}{24}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{8}{24}\right)^2}\right)\\
&=\frac{1}{6}\left(\frac{24^2}{24^2+11^2}+\frac{24^2}{24^2+10^2}+\cdots\right.\\
&\qquad\left.\cdots+\frac{24^2}{24^2+7^2}+\frac{24^2}{24^2+8^2}\right)\\
&=\left(\frac{1}{697}+\frac{1}{676}+\frac{1}{657}+\frac{2}{640}+\frac{2}{625}+\frac{2}{612}+\frac{2}{601}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2}{592}+\frac{2}{585}+\frac{2}{580}+\frac{2}{577}+\frac{1}{576}\right)\times 96\\
&\fallingdotseq 3.1492
\end{aligned}$$

1.3 S_n と定積分

n 個の三角形の和

$$S_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k^2} \tag{3}$$

を見ると，区分求積法が思い出される。



曲線 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ と x 軸，$x=a$，$x=b$ で囲まれる領域の面積を，区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分して，n 個の長方形の面積で近似する。

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k^2}\frac{b-a}{n}$$

$n\to\infty$ とすると，極限値が領域の面積と一致する。

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k^2}\frac{b-a}{n} \tag{6}$$

これを (3),(4),(5) に適用すると

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx \tag{7}$$

$$\pi = 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx \tag{8}$$

$$\pi = 4\int_{-1/2}^{1/3}\frac{1}{1+x^2}dx \tag{9}$$

注 (8),(9) の式は，$x=\tan\theta$ と置いて置換積分しても得られる。

1.4　整関数の積分で近似

被積分関数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ を整関数（多項式）で近似する。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} \\
&= 1-\frac{x^2}{1+x^2} = 1-\frac{x^2(1+x^2)-x^4}{1+x^2} \\
&= 1-x^2+\frac{x^4}{1+x^2} = 1-x^2+\frac{x^4(1+x^2)-x^6}{1+x^2} \\
&= 1-x^2+x^4-\frac{x^6}{1+x^2} \\
&\ \ \vdots \\
&= 1-x^2+x^4-x^6+\cdots+x^{4m}-\frac{x^{4m+2}}{1+x^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

注 この式は，初項が 1 で公比が $-x^2$ の等比数列の $2m+1$ 項までの和の式を変形しても得られる。

$|x|<1$ のとき

$$\frac{1}{1+x^2} \fallingdotseq 1-x^2+x^4-x^6+\cdots+x^{4m} \tag{11}$$

ゆえに，$-1 \leqq a < b \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx &\fallingdotseq \int_a^b \left(1-x^2+x^4-x^6+\cdots+x^{4m}\right)dx \\
&= \left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{4m+1}}{4m+1}\right]_a^b
\end{aligned} \tag{12}$$

1.4.1 整関数の値の計算

一般に整関数 $f(x)$ に a を代入した $f(a)$ の計算は，次の (イ) のようにすると早くできる。

例 $f(x) = 3x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x + 4$ について $f(3)$ を求める。

(ア) 普通の方法

$f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 7x + 4$ の形のまま計算する。

係数	2	-5	4	5	-7	4
右 $\times a$	243 ←	81 ←	27 ←	9 ←	3 ←	1
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
上 2 つの積	486	-405	108	45	-21	4
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
左 ＋ 上	486 →	81 →	189 →	234 →	213 →	217

(イ) 早い方法

$f(x) = ((((2x - 5)x + 4)x + 5)x - 7)x + 4$ と変形して計算する。

係数	2	-5	4	5	-7	4
左下 $\times a$		6	3	21	78	213
	↓ ↗	↓ ↗	↓ ↗	↓ ↗	↓ ↗	↓
上 2 つの和	2	1	7	26	71	217

これは，単純な電卓で，次のようにキーインして計算するのと同じである。

2 × 3 － 5 × 3 ＋ 4 × 3 ＋ 5 × 3 － 7 × 3 ＋ 4 ＝

（掛け算優先でなく左から計算する）

$f\left(\frac{1}{2}\right)$ の場合は次のようにキーインすればよい。

2 ÷ 2 － 5 ÷ 2 ＋ 4 ÷ 2 ＋ 5 ÷ 2 － 7 ÷ 2 ＋ 4 ＝

1.4.2　$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$ の場合

式 (12) で $m = 3$ のときの近似値を計算することにする。

$$F(x) = \frac{x^{13}}{13} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x$$

とおくと，$F(-x) = -F(x)$ だから

$$\int_{-1/2}^{1/3} \frac{1}{1+x^2} dx \fallingdotseq \left[F(x)\right]_{-1/2}^{1/3} = F\left(\tfrac{1}{3}\right) - F\left(-\tfrac{1}{2}\right) = F\left(\tfrac{1}{3}\right) + F\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ \pi = \left(F\left(\tfrac{1}{3}\right) + F\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) \times 4$$

$f(\frac{1}{3}), f(\frac{1}{2})$ を計算するには前節で説明したように，次のように変形した式で計算すると早い。

$$F(x) = \left(\left(\left(\left(\left(\left(\tfrac{1}{13}x^2 - \tfrac{1}{11}\right)x^2 + \tfrac{1}{9}\right)x^2 - \tfrac{1}{7}\right)x^2 + \tfrac{1}{5}\right)x^2 - \tfrac{1}{3}\right)x^2 + 1\right)x$$

ただし，係数が分数なので，普通の電卓で計算するときは，小数に書き換えておく。本ホームページにある分数電卓を使うと，係数を 分子 | 分母 とキーインすればよい。

1. （分数電卓の場合）

$$1 \mid 13 \div 9 - 1 \mid 11 \div 9 + 1 \mid 9 \div 9$$
$$- 1 \mid 7 \div 9 + 1 \mid 5 \div 9 - 1 \mid 3 \div 9 + 1 \div 3 \ \boxed{\mathrm{M+}}$$
$$1 \mid 13 \div 4 - 1 \mid 11 \div 4 + 1 \mid 9 \div 4$$
$$- 1 \mid 7 \div 4 + 1 \mid 5 \div 4 - 1 \mid 3 \div 4 + 1 \div 2 \ \boxed{\mathrm{M+}}$$
$$\boxed{\mathrm{MR}} \times 4$$

2. （普通の電卓の場合）

$$0.07692308 \div 9 - 0.09090909 \div 9 + 0.11111111 \div 9$$
$$- 0.14285714 \div 9 + 0.2 \div 9 - 0.33333333 \div 9 + 1 \div 3 \ \boxed{\mathrm{M+}}$$
$$0.07692308 \div 4 - 0.09090909 \div 4 + 0.11111111 \div 4$$
$$- 0.14285714 \div 4 + 0.2 \div 4 - 0.33333333 \div 4 + 1 \div 2 \ \boxed{\mathrm{M+}}$$
$$\boxed{\mathrm{MR}} \times 4$$

これで計算すると $\pi \fallingdotseq 3.141599$ が得られる。

分数電卓の場合，1|17 や 1|21 から始めてもっと正確な値を求めることができる。