1　頂点と辺と面の個数の関係

1.1　オイラーの多面体公式

定理 1.1　凸多面体において，頂点 (vertex) の数 V，辺 (edge) の数 E，面 (face) の数 F の間に，つぎの等式が成り立つ。

$$V - E + F = 2$$

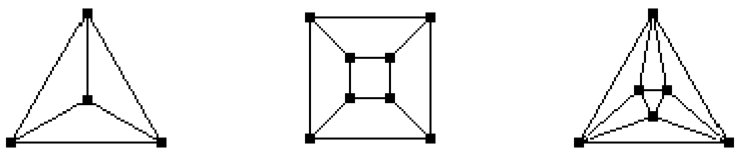
例 1.1　5 つの正多面体について確かめてみよう。

	正 4 面体	正 6 面体	正 8 面体	正 12 面体	正 20 面体
頂点の個数 V	4	8	6	20	12
辺の個数 E	6	12	12	30	30
面の個数 F	4	6	8	12	20
$V - E + F$	2	2	2	2	2

1.2　平面図形に変更

多面体が，中空でかつゴムのような素材でできているとしよう。ひとつの面を切り捨て壺のようにした後，切り口を押し広げて，全体が平面になるまで伸ばした図形を考える。

例 1.2　四面体，六面体，八面体は，このようにできる。



このように，平面図形化したものを見ると，頂点の数 V，辺の数 E は立体の時と同じで，外側に無限に広がっている部分を面として数えると，面の数 F も立体の時と同じである。

定理 1.2　下記の条件を満たす平面図形において，次の等式が成り立つ。

$$V - E + F = 2$$

(1)　頂点が少なくとも１つある。

(2)　辺の両端は頂点である。

(3)　どの２つの辺も，端点以外を共有しない。

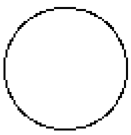
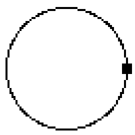
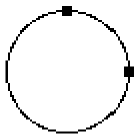
(4)　どの２つの頂点も，何本かの辺を伝って結ばれている。

例 1.3　つぎの左の図形は，定理の条件を満たしていない。右の２つの図形は，満たしているので等式が成り立つ。

(1)　条件 (1) を満たさない例

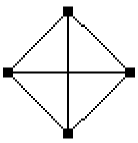
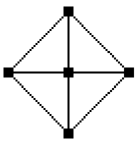
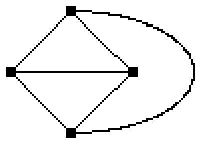
$0-0+1 \neq 2$　　$1-0+1=2$　　$2-1+1=2$

(2)　条件 (2) を満たさない例

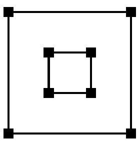
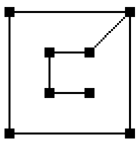
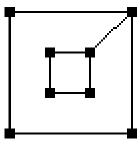
$0-1+2 \neq 2$　　$1-1+2=2$　　$2-2+2=2$

(3)　条件 (3) を満たさない例

$4-6+5 \neq 2$　　$5-8+5=2$　　$4-6+4=2$

(4)　条件 (4) を満たさない例

$8-8+3 \neq 2$　　$8-8+2=2$　　$8-9+3=2$

1.3　定理 1.2 の証明

辺の個数 E に関する数学的帰納法で証明する。

(i)　$E=0$ のとき

条件 (1) と (4) より，頂点がただ 1 個あるだけの図形である。

$$V-F+E=1-0+1=2$$

(ii)　$E>0$ のとき

面が複数あるかどうかで場合分けする。

(1)　$F \geqq 2$ のとき

隣り合っている 2 つの面の境界の一部（または全部）になっている辺があるから，それを取り除いた図形を考える。。少なくとも一方の面は境界で囲まれているから，この辺を取り除いても定理の条件 (3) が損なわれることはない。他の条件は問題なく満たされたままである。
帰納法の仮定により

$$V-(E-1)+(F-1)=2$$
$$\therefore\ V-E+F=2$$

(2)　$F=1$ のとき

ある頂点から始めて，辺で結ばれている頂点を次々にたどっていく。境界で囲まれた面がないから，同じ頂点に戻ることはない。ゆえに，いつか次に進めない頂点にたどりつく。この頂点には（最後に通った）辺が 1 本だけしかない。
この頂点と辺を取り除いても，定理の条件は問題なく満たされている。
帰納法の仮定により

$$(V-1)-(E-1)+F=2$$
$$\therefore\ V-E+F=2$$

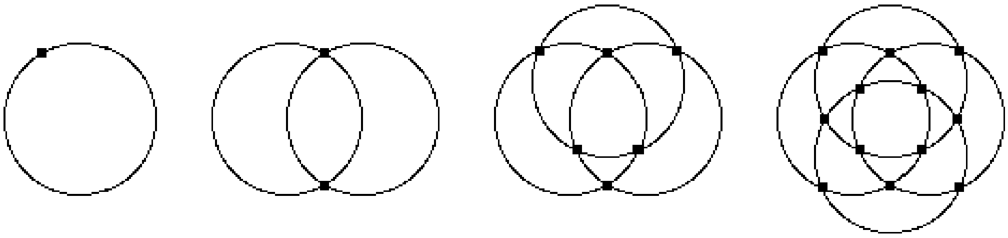
証明終

したがって，定理 1.1 が成り立つこともわかった。

1.4 応用例

オイラーの等式は，分割した領域の個数を数える問題に有効である。

問題 1　n 個の円を描いて，なるべく多くの領域に分割する，領域の最大個数 F_n を求めよ。



解答

(1) $n = 1$ のとき

$$F_1 = 2 \tag{1-1}$$

(2) $n \geqq 2$ のとき
領域の個数が最大になるのは，どの 2 つの円も 2 点で交わり，1 つの点を 3 つの円が共有することはないときである。
2 つの円の組合せが，${}_n\mathrm{C}_2$ 通りあるから，交点の個数 V は

$$V = 2{}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)$$

1 つの円周上に交点が $2(n-1)$ 個あるから，円周は $2(n-1)$ 個の弧に別れる。よって，弧の総数 E は

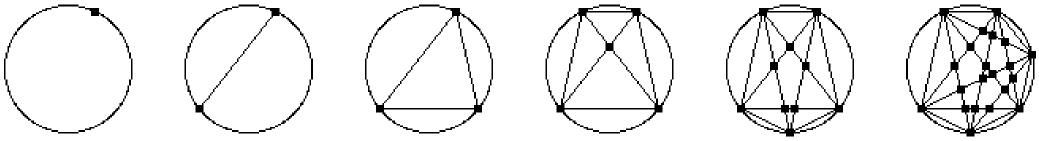
$$E = 2(n-1)n$$

ゆえに

$$F_n = 2 + E - V = 2 + 2(n-1)n - n(n-1) = n^2 - n + 2 \tag{1-2}$$

(注 1)　(1-2) 式は (1-1) 式を含んでいる。
(注 2)　$F_n = 2 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-1)$

問題 2　円周上に n 個の点をとり，すべての 2 点を結ぶ弦を描く。ただし，円の内部の点を 3 本以上の弦が通ることがないように，n 個の点をとる。このとき，円の**内部**はいくつの領域に分かれるか，領域の個数 F_n を求めよ。



解答　円の外部を数えないので，$F = 1 + E - V$ である。

(1) $n \leqq 3$ のとき

$$F_1 = 1\,,\quad F_2 = 2\,,\quad F_3 = 4 \tag{2-1}$$

(2) $n \geqq 4$ のとき

円周上には，点が n 個，弧が n 個ある。

弦は ${}_n\mathrm{C}_2$ 本ある。

弦の交点は何個あるか。円周上の 4 点を選ぶと交点が 1 つ定まるから，${}_n\mathrm{C}_4$ 個ある。

弦が交点で分かれてできる辺が何個あるか。1 本の弦の上に交点が k 個あると，$k+1$ 個の辺に分かれる。1 つの交点が 2 本の弦の上にあるから，${}_n\mathrm{C}_2$ 本の弦と ${}_n\mathrm{C}_4$ 個の交点からできる辺の個数は

$${}_n\mathrm{C}_2 + 2{}_n\mathrm{C}_4$$

ゆえに，

$$F_n = 1 + (n + {}_n\mathrm{C}_2 + 2{}_n\mathrm{C}_4) - (n + {}_n\mathrm{C}_4) = 1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 \tag{2-2}$$

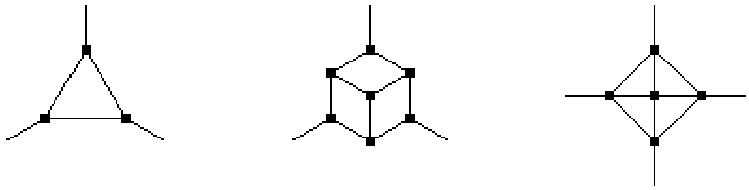
(注)　${}_n\mathrm{C}_k = 1 \cdot \dfrac{n}{1} \cdot \dfrac{n-1}{2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{n-k+1}{k}$

と定めると，$k > n$ のとき ${}_n\mathrm{C}_k = 0$ となり，(2-2) は (2-1) を含んでいる。

1.5　平面図形に変更 2

こんどはひとつの頂点を切り取って，その穴を無限に広げた図形を考える。

例 1.4　正四面体，正六面体，正八面体は次のようになる。



各辺は無限に伸びているので，定理 1.2 の条件を満たしていない。

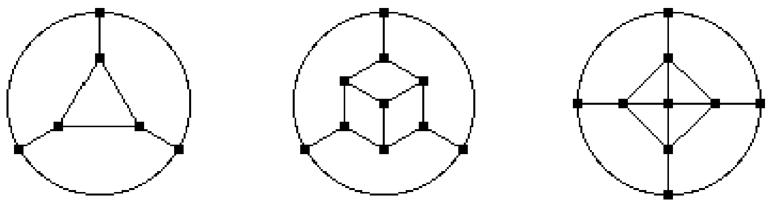
定理 1.3　下記の条件を満たす平面図形において，次の等式が成り立つ。

$$V - E + F = 1$$

(1)　無限に伸びている辺が少なくとも 1 つある。
(2)　辺の端は無限に伸びているか，頂点で留まる。
(3)　どの 2 つの辺も，端点以外を共有しない。
(4)　どの 2 つの頂点も，何本かの辺を伝って結ばれている。

1.6　定理 1.3 の証明

すべての頂点を含むような大きい円を描いて，円の外の無限に伸びている線を消し去った図形を考える。



面は円の外部が 1 つ増えるので $F + 1$ となる。
円周上に点が k 個できたとすると，弧も k 個できている。
ゆえに

$$(V + k) - (E + k) + (F + 1) = 2$$
$$\therefore\ V - E + F = 1$$

注 1.1　無限の辺がすべて無限遠点 1 点を共有していると考えて

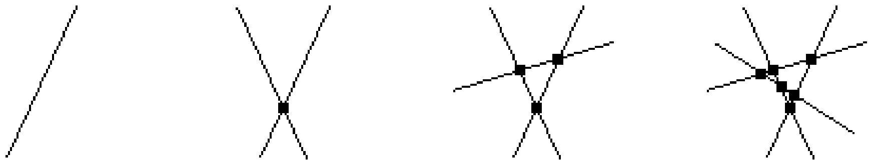
$$(V + 1) - E + F = 2$$

で示すこともできる。しかし，高校生には理解しにくいかもしれない。

1.7　応用例 2

定理 1.3 を用いて，領域の個数を求める問題もある。

問題 3　平面上に n 本の線を描いて，なるべく多くの領域に分ける。領域の最大個数 F_n を求めよ。



解答 領域の個数 F_n が最大になるのは，つぎの条件を満たすように線を描くときである。

- どの 2 本の線も交わる。
- どの 3 本の線も 1 点で交わらない。

(1)　$n = 1$ のとき

$$F_1 = 2 \tag{3-1}$$

(2)　$n \geqq 2$ のとき
2 本の直線を選ぶと頂点が 1 つ定まるから，頂点の個数 V は

$$V = {}_n\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

どの直線も，交点が $n-1$ 個あるから，n 個の辺に分かれている。ゆえに，辺の総数 E は

$$E = n^2$$

したがって

$$F_n = 1 - V + E = 1 - \frac{1}{2}n(n-1) + n^2 = \frac{1}{2}n(n+1) + 1 \tag{3-2}$$

(注)　(3-2) 式は (3-1) 式も含んでいる。
(注)　$F_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$