質問

「三角形の内接円の半径 r は外接円の半径 R の 2 分の 1 以下である」の証明を，面積 S を 3 辺 $2R\sin A, 2R\sin B, 2R\sin C$ を使って表して示そうと思ったんですけどつまりました。このやり方の証明してほしいです

回答

内心 I を頂点とする 3 つの三角形 IBC,ICA,IAB に分けて考えると

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rR(\sin A+\sin B+\sin C)$$

外心 O を頂点とする 3 つの三角形 OBC,OCA,OAB に分けて考えると

$$S=\frac{1}{2}R^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$
$$\therefore\ \frac{r}{R}=\frac{1}{2}\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

ところで

$$\sin 2A+\sin 2B=2\sin(A+B)\cos(A-B)\leqq 2\sin(A+B)=2\sin C$$

同様に

$$\sin 2B+\sin 2C\leqq 2\sin A$$
$$\sin 2C+\sin 2A\leqq 2\sin B$$
$$\therefore\ \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\leqq\sin A+\sin B+\sin C\quad(\text{等号は } A=B=C \text{ のとき成立})$$

ゆえに

$$\frac{r}{R}\leqq\frac{1}{2}\quad(\text{等しくなるのは正三角形のとき})$$